Title: O równaniach funkcyjnych związanych z rozdzielnością implikacji rozmytych

Author: Wanda Niemyska

Citation style: Niemyska Wanda. (2015). O równaniach funkcyjnych związanych z rozdzielnością implikacji rozmytych. Praca doktorska. Katowice : Uniwersytet Śląski

Uniwersytet Śląski w Katowicach
Instytut Matematyki

Wanda Niemyska

O równaniach funkcyjnych związanych z rozdzielnością implikacji rozmytych

Praca doktorska

Promotor
Dr hab. Michał Baczyński

Katowice 2015

Spis treści

Wstęp

Rozdzielność działań jest własnością pierścienia określającą powiązanie dwóch operatorów: addytywnego (nazywanego zwykle dodawaniem) oraz multyplikatywnego (nazywanego zwykle mnożeniem). Niech F oraz G będą pewnymi działaniami dwuargumentowymi w niepustym zbiorze X. Powiemy, że działanie F jest rozdzielne względem działania G, jeżeli dla wszystkich $x, y, z \in X$ zachodzą równości:

$$F(x, G(y, z)) = G(F(x, y), F(x, z)), \tag{DL}$$

$$F(G(x, y), z) = G(F(x, z), F(y, z)). \tag{DR}$$

Można mówić o rozdzielności lewostronnej F względem G, gdy spełniony jest jedynie pierwszy z powyższych warunków (DL), lub o rozdzielności prawostronnej, gdy spełniony jest wyłącznie drugi z warunków (DR). Działanie przemienne oraz jednostronnie rozdzielne jest oczywiście rozdzielne obustronnie.

Znany ze szkoły podstawowej jest przykład rozdzielności mnożenia względem dodawania w arytmetyce liczb rzeczywistych:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

W powyższym równaniu funkcje F, G przyjęły postać $F(a, b) = a \cdot b$ oraz $G(a, b) = a + b$ dla $a, b \in \mathbb{R}$. Jednocześnie dodawanie liczb nie jest rozdzielne względem mnożenia – w ogólności $a + (b \cdot c) \neq (a + b) \cdot (a + c)$. Kolejne przykłady poznaliśmy w szkole średniej. W teorii mnogości operacja przecięcia zbiorów jest rozdzielna względem ich sumy, a operacja sumy zbiorów jest rozdzielna względem ich przecięcia:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

W rachunku zdań koniunkcja jest rozdzielna względem alternatywy, a alternatywa względem koniunkcji:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r), \qquad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

Ponadto implikacja jest rozdzielna lewostronnie względem koniunkcji oraz alternatywy:

$$p \to (q \wedge r) \equiv (p \to q) \wedge (p \to r),$$

$$p \to (q \vee r) \equiv (p \to q) \vee (p \to r),$$

podczas gdy nie jest ona rozdzielna prawostronnie względem żadnego z tych operatorów logicznych. Prawdziwe natomiast są następujące dwie równoważności, będące pewną wersją prawostronnej rozdzielności implikacji:

$$(p \wedge q) \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r),$$

$$(p \vee q) \to r \equiv (p \to r) \wedge (q \to r).$$

Ostatnio wymienione cztery klasyczne tautologie możemy przepisać w logice wielowartościowej w postaci następujących równań rozdzielności:

$$I(x, C_1(y,z)) = C_2(I(x,y), I(x,z)), \tag{D1}$$

$$I(x, D_1(y,z)) = D_2(I(x,y), I(x,z)), \tag{D2}$$

$$I(C(x,y), z) = D(I(x,z), I(y,z)), \tag{D3}$$

$$I(D(x,y), z) = C(I(x,z), I(y,z)), \tag{D4}$$

spełnione dla wszystkich $x, y, z \in [0,1]$, gdzie I jest pewnym uogólnieniem klasycznej implikacji, C, C_1, C_2 są pewnym uogólnieniem klasycznej koniunkcji, a D, D_1, D_2 są pewnym uogólnieniem klasycznej alternatywy. Równania te można definiować i badać jeszcze ogólniej na dowolnej kracie $\mathcal{L} = (L, \leqslant_L)$ w miejsce odcinka jednostkowego $[0,1]$ ze zwykłym porządkiem „$\leqslant$" w zbiorze liczb rzeczywistych.

Z punktu widzenia równań funkcyjnych prawostronną rozdzielność jako pierwszy badał prawdopodobnie J. Aczél (porównaj [1, Rozdział 7.1.3, Th. 6]). Scharakteryzował on rozwiązania równania funkcyjnego (DR) wśród ograniczonych z dołu funkcji F oraz ciągłych, rosnących, łącznych oraz posiadających element neutralny funkcji G.

Wiele wyników omawianych w niniejszej pracy może być widziana jako generalizacja rezultatu Aczéla przy słabszych założeniach na funkcje F i G. Jako uogólnienie klasycznej implikacji przyjmujemy tutaj implikację rozmytą, a jako uogólnienia klasycznych koniunkcji i alternatywy – odpowiednio normę oraz konormę trójkątną. Badamy równania rozdzielności (D1) - (D4) dla tych operatorów określonych na różnych kratach zupełnych $\mathcal{L}$, koncentrując się na rozmaitych równaniach funkcyjnych, które pojawiają się przy okazji owych badań.

W rozdziale 1 wprowadzamy definicje z zakresu krat oraz teorii zbiorów rozmytych, w tym w szczególności logiki rozmytej. Prezentujemy podstawowe własności operatorów rozmytych oraz najważniejsze ich rodziny, które będą wykorzystywane w dalszej części pracy. Następnie przedstawiamy zarys tła badań nad rozdzielnością implikacji rozmytych, wskazując przykład ich zastosowania w logice rozmytej w celu zmniejszenia złożoności obliczeniowej działania reguł rozmytych we wnioskowaniu przybliżonym opartym na metodzie CRI.

Odkąd zauważono kluczową rolę rozdzielności implikacji rozmytych dla powyższego zastosowania, szeroka grupa badaczy rozpoczęła badania nad tą własnością implikacji. W rozdziale 2 prezentujemy przegląd najważniejszych wyników uzyskanych od roku 1998, dzieląc je na dwie główne grupy ze względu na to, czy zakładano, że implikacja jest znana, a postać t-norm lub t-konorm (lub jeszcze innych operacji) jest szukana, czy też odwrotnie - że to właśnie postać implikacji jest szukana, podczas gdy t-normy i t-konormy (lub jeszcze inne operacje) są znane. Szczególnie dokładnie prezentujemy te rezultaty, które w dalszych rozdziałach są uzupełniane lub uogólniane. Wyniki w rozdziale 2 prezentowane są przeważnie bez dowodów.

W rozdziałach 3, 4 i 5 przedstawione są nowe rezultaty uzyskane przez Autorkę we współpracy z M. Baczyńskim, R. Gerem, M. E. Kuczmą oraz T. Szostokiem. Część z nich została już opublikowana w pracach [23, 24, 20, 21, 22], część czeka jeszcze na publikację.

W rozdziale 3 zaprezentowane są rozwiązania równania funkcyjnego

$$f(m_1(x+y)) = m_2(f(x) + f(y)),$$

gdzie $f\colon [0, r_1] \to [0, r_2]$ dla pewnych stałych r_1, r_2, które mogą być skończone lub nieskończone.

Równanie to uogólnia inne równanie funkcyjne:

$$f(\min(x+y,r_1)) = \min(f(x)+f(y),r_2),$$

które odgrywa istotną rolę dla rozdzielności implikacji rozmytych względem ciągłych i archimedesowych t-norm oraz t-konorm i jest wyprowadzone w rozdziale 2 w sekcji 2.2.1. Nasze rozważania w rozdziale 3 podzielone są na dwie główne części ze względu na to, czy funkcja m_2 jest różnowartościowych, czy też nie. W przypadku m_2 nieróżnowartościowej rozwiązujemy m.in. klasyczne równanie Jensena rozszerzone do nieskończoności.

Rozdział 4 poświęcony jest równaniom rozdzielności implikacji rozmytych względem uninorm rozkładalnych na kracie $\mathcal{L}^I$. Jest to swego rodzaju kontynuacja wcześniejszych badań dotyczących rozdzielności implikacji względem klasycznych uninorm na $([0,1],\leqslant)$ oraz względem t-norm i t-konorm rozkładalnych na $\mathcal{L}^I$, prezentowanych odpowiednio w podrozdziałach 2.2.3 oraz 2.2.4. Centralne miejsce w tym rozdziale zajmują twierdzenia 4.3 - 4.7, w których rozwiązujemy dwuwymiarowe równanie Cauchy'ego:

$$f(u_1+v_1,u_2+v_2) = f(u_1,u_2)+f(v_1,v_2),$$

również rozszerzone do nieskończoności.

W rozdziale 5 badamy równanie rozdzielności (D2) dla funkcji I będącej R-implikacją otrzymaną z t-normy ścisłej. Inaczej niż w rozdziałach 3 i 4, tym razem zakładamy, że implikacja jest znana, a szukamy postaci t-konorm. Wyniki zawarte w tym rozdziale są uzupełnieniem dla rezultatów B. Jayarama, C. J. M. Rao oraz M. Baczyńskiego, którzy w pełnej ogólności rozwiązali równanie (D2) dla funkcji I będącej S-implikacją oraz R-implikacją otrzymaną z t-normy nilpotentnej, natomiast dla I będącej R-implikacją otrzymaną z t-normy ścisłej udało im się uzyskać rozwiązania jedynie wewnątrz rodziny t-konorm ciągłych i archimedesowych. Szczególnie ciekawa jest dyskusja nad przedstawionymi w rozdziale 5 dwoma równaniami funkcyjnymi:

$$h(\min(xg(y),1)) = \min(h(x)+h(xy),1),$$
$$h(xg(y)) = h(x)+h(xy).$$

Rozwiązanie ich przy pewnych szczególnych założeniach na funkcje g i h było konieczne dla udowodnienia zgodności nowych wyników z dotychczasowymi, prezentowanymi odpowiednio w twierdzeniach 5.8 oraz 5.3. W uzyskaniu końcowych wyników kluczową rolę odegrali m.in. R. Ger oraz M. E. Kuczma.

Aby prezentacja nowych wyników była możliwie klarowna dla czytelnika, w niniejszej pracy przyjęto konwencję, w której przy wszystkich rezultatach uzyskanych bez udziału Autorki podane są odnośniki do źródłowych prac. Natomiast wyniki, w których swój wkład ma Autorka, pozostawione są bez odnośników, jakkolwiek przeważnie przedstawione są one wraz z dowodami.

Rozdział 1

Wprowadzenie

W pracy wykorzystujemy operację sprzężenia, która pozwala nam na określenie pewnych klas działań algebraicznych w $[0,1]$. Opierając się na rozdziale 8 w [54], definiujemy:

Definicja 1.1. Niech $n \in \mathbb{N}$. Funkcje $F, G\colon [0,1]^n \to [0,1]$ są *sprzężone*, gdy istnieje takie $\varphi \in \Phi$, że $G = F_\varphi$, gdzie

$$F_\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi^{-1}(F(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))), \qquad x_i \in [0,1].$$

Przez Φ oznaczamy zbiór rosnących bijekcji z odcinka jednostkowego $[0,1]$ w siebie.

Istotny związek pomiędzy ciągłością a monotonicznością (ograniczonych) funkcji dwóch zmiennych, który wykorzystamy w niniejszej pracy, podaje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.2 (zob. [68, Theorem 3.1.3] oraz [52, Proposition 1.19])**.** *Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dalej niech funkcja $F\colon [a,b]^2 \to [a,b]$ będzie rosnąca względem obu zmiennych z osobna. Wówczas F jest ciągła (ze względu na zespół zmiennych) wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągła ze względu na każdą ze zmiennych z osobna.*

W pracy będziemy również korzystali kilkukrotnie z notacji potęgowej $x_F^{[n]}$, która dla dwuargumentowej operacji łącznej F na $[a,b]$, $a < b$, z elementem neutralnym e, oraz dla $n \in \mathbb{N}$, $x \in [a,b]$ jest zdefiniowana przez

$$x_F^{[n]} := \begin{cases} e, & n = 0, \\ x, & n = 1, \\ F(x, x_F^{[n-1]}), & n > 1. \end{cases}$$

Za pomocą symboli $LHS(*)$ oraz $RHS(*)$ będziemy oznaczali odpowiednio lewą i prawą stronę pewnego równania $(*)$.

1.1 Kraty

Nasze rozważania rozpoczniemy od przypomnienia najważniejszych definicji i faktów dotyczących krat. Zdefiniujemy tutaj również pewne specjalne kraty, które wykorzystamy w dalszej części pracy.

Definicja 1.3 ([30], [41])**.** Zbiór częściowo uporządkowany $(L, \leqslant_L)$ jest *kratą*, gdy wszystkie jego podzbiory dwuelementowe mają kresy. Iloczyn i sumę postaci

$$x \wedge y = \inf\{x, y\}, \qquad x \vee y = \sup\{x, y\}, \qquad\qquad x, y \in L,$$

nazywamy wówczas *działaniami kratowymi* oraz używamy zapisu $(L, \wedge, \vee)$.

Przykład 1.4. Zbiór funkcji rzeczywistych o wspólnej dziedzinie D, uporządkowany przez relację

$$f \leqslant g \iff f(x) \leqslant g(x) \quad \text{dla wszystkich} \quad x \in D,$$

jest kratą, w której

$$(f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x)), \qquad (f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x)), \qquad\qquad x \in D.$$

Poniższe twierdzenie pozwala rozpatrywać kratę zarówno jako strukturę porządkową, jak i strukturę algebraiczną.

Twierdzenie 1.5 ([30], [41, twierdzenie 1.1.3])**.** *Działania w strukturze algebraicznej* $(L, \wedge, \vee)$ *spełniają*

$$\begin{aligned} x \wedge y &= y \wedge x, & x \vee y &= y \vee x, \\ (x \wedge y) \wedge z &= x \wedge (y \wedge z), & (x \vee y) \vee z &= x \vee (y \vee z), \\ x \wedge (x \vee y) &= x, & x \vee (x \wedge y) &= x, \end{aligned}$$

dla dowolnych $x, y, z \in L$*, wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór* L *z relacją*

$$(x \leqslant y) \iff (x \wedge y = x), \qquad\qquad x, y \in L,$$

tworzy kratę.

Definicja 1.6 (zob. [30], [41])**.** (i) Kratę $(L, \wedge, \vee)$ nazywamy *rozdzielną*, gdy

$$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z), \qquad\qquad (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z),$$

dla dowolnych $x, y, z \in L$.

(ii) Mówimy, że krata $(L, \leqslant_L)$ jest *ograniczona*, gdy istnieją kresy $\inf L$ oraz $\sup L$, czyli istnieją takie elementy $0, 1 \in L$, że

$$a \wedge 1 = a, \qquad a \vee 0 = a, \qquad\qquad a \in L.$$

(iii) Kratę $(L, \leqslant_L)$ nazywamy *zupełną*, gdy dla dowolnego zbioru $A \subset L$ istnieją kresy $\inf A$, $\sup A \in L$.

Przykład 1.7. Ponieważ zbiór $L = [0, 1]$ jest liniowo uporządkowany, więc jest on kratą rozdzielną (por. [41, przykład 1.2.2, str. 27]). Dodatkowo jest to krata zupełna, gdyż zbiór $[0, 1]$ jest ograniczony oraz domknięty.

Przykład 1.8. Zdefiniujmy zbiór L^* oraz częściowy porządek $\leqslant_{L^*}$ na tym zbiorze w następujący sposób:

$$L^* = \{(x_1, x_2) \in [0,1]^2 \mid x_1 + x_2 \leqslant 1\},$$
$$(x_1, x_2) \leqslant_{L^*} (y_1, y_2) \iff x_1 \leqslant y_1 \wedge x_2 \geqslant y_2.$$

Łatwo można zaobserwować, że $\mathcal{L}^* = (L^*, \leqslant_{L^*})$ jest kratą zupełną z elementem najmniejszym $0_{L^*} = (0, 1)$ oraz elementem największym $1_{L^*} = (1, 0)$.

Przykład 1.9. Zdefiniujmy zbiór L^I oraz częściowy porządek $\leqslant_{L^I}$ na tym zbiorze w następujący sposób:

$$L^I = \{(x_1, x_2) \in [0,1]^2 \mid x_1 \leqslant x_2\},$$
$$(x_1, x_2) \leqslant_{L^I} (y_1, y_2) \iff x_1 \leqslant y_1 \wedge x_2 \leqslant y_2.$$

W dalszej części pracy dla $x \in L^I$ będziemy używali oznaczenia $x = [x_1, x_2]$. Ponownie, łatwo można zauważyć, że $\mathcal{L}^I = (L^I, \leqslant_{L^I})$ jest także kratą zupełną - tym razem elementem najmniejszym jest $0_{L^I} = [0, 0]$, a elementem największym $1_{L^I} = [1, 1]$.

1.2 Wybrane pojęcia logiki rozmytej

1.2.1 Zbiory rozmyte

Aby móc opisać i zrozumieć znaczenie równań rozdzielności implikacji wielowartościowych (a właściwie rozwiązań tych równań) w sterowaniu opartym na logice rozmytej, potrzebne jest wprowadzenie pewnych podstawowych definicji i faktów z teorii zbiorów rozmytych. Pojęcie zbioru rozmytego zostało po raz pierwszy wprowadzone przez L.A. Zadeha w 1965 r. jako uogólnienie pojęcia funkcji charakterystycznej zbioru $A \subset X$:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Owe uogólnienie polega na zastąpieniu dwuelementowego zbioru wartości $\{0, 1\}$ przez przedział $[0, 1]$ (zob. L.A. Zadeh [80]) lub, w ogólności, przez dowolną kratę (zob. J. Goguen [47]).

Definicja 1.10 (por. Drewniak [41])**.** Niech $X \neq \emptyset$ oraz niech $\mathcal{L} = (L, \leqslant_L)$ będzie kratą. Zbiorem *L-rozmytym* w przestrzeni X nazywamy dowolne odwzorowanie $A \colon X \to L$. Rodzinę zbiorów L-rozmytych w X oznaczamy symbolem $L(X)$.

Gdy $L = [0, 1]$ z klasycznym porządkiem, wówczas mówimy po prostu o zbiorach rozmytych, a ich rodzinę oznaczamy symbolem $F(X)$.

Samo pojęcie zbioru rozmytego służy do formalnego, matematycznego określenia pojęć nieprecyzyjnych, wieloznacznych, np. „duża liczba” czy „wysoka temperatura”, zaś celem wprowadzenia zbiorów rozmytych było otrzymanie narzędzi pomocnych przy modelowaniu zjawisk złożonych pojawiających się w inżynierii, medycynie, ekonomii i innych naukach. Nas w szczególności będzie interesować przypadek, gdy $L = [0, 1]$ oraz gdy $L = L^I$.

Jednym z uogólnień klasycznej teorii zbiorów rozmytych jest zaproponowana przez K. Atanassova w 1983 roku intuicjonistyczna teoria zbiorów rozmytych [3] (por. [4]). Każdemu elementowi przestrzeni przyporządkowuje ona nie tylko stopień przynależności do zbioru, lecz również stopień „nie-przynależności” (zob. dyskusję na temat terminologii zbiorów intuicjonistycznych w [44]).

Definicja 1.11. *Intuicjonistycznym (w sensie Atanassova) zbiorem rozmytym* w przestrzeni X nazywamy dowolne odwzorowanie $A\colon X \to L^*$.

Innym rozszerzeniem klasycznej teorii zbiorów rozmytych jest przedziałowa teoria zbiorów rozmytych, którą zaproponowali niezależnie od siebie R. Sambuc [67] oraz M. Gorzałczany [48]. W teorii tej każdemu elementowi przestrzeni w miejsce stopnia przynależności do zbioru przypisywany jest domknięty przedział, który można interpretować jako przybliżenie nieznanego stopnia przynależności.

Definicja 1.12. *Przedziałowym zbiorem rozmytym* w przestrzeni X nazywamy dowolne odwzorowanie $A\colon X \to L^I$.

W pracy [38] pokazano, że intuicjonistyczna teoria zbiorów rozmytych z matematycznego punktu widzenia jest równoważna przedziałowej teorii zbiorów rozmytych. Rzeczywiście, punkt $(x_1, x_2) \in L^*$ możemy interpretować jako przedział $[x_1, 1 - x_2] \in L^I$ (i odwrotnie). W niniejszej pracy nasze wyniki przedstawiać będziemy tylko w języku przedziałowych zbiorów rozmytych, ale ważne jest, żeby pamiętać, że łatwo mogą być one przekształcone do przypadku intuicjonistycznych zbiorów rozmytych.

Problem, który jest szczególnie interesujący z matematycznego punktu widzenia, to sposób określenia operacji na zbiorach rozmytych. W klasycznej teorii mnogości działania na zbiorach pozostają w ścisłym związku z logiką dwuwartościową. Jest oczywiste, że problem zdefiniowania działań na zbiorach rozmytych sprowadza się do odpowiedniego rozszerzenia negacji, alternatywy, koniunkcji oraz implikacji, gdy zbiorem dopuszczalnych wartości jest przedział $[0, 1]$ (lub w ogólności dowolna krata $\mathcal{L}$). L.A. Zadeh w 1965 roku w pracy [80] zaproponował poniższe definicje, gdy $L = [0, 1]$.

Definicja 1.13. (i) Zbiór rozmyty A jest *pusty*, gdy $A(x) = 0$ dla każdego $x \in X$.

(ii) Dwa zbiory rozmyte A i B są *równe*, gdy $A(x) = B(x)$ dla każdego $x \in X$.

(iii) Zbiór rozmyty A *zawiera się* w zbiorze rozmytym B, co oznaczamy przez $A \subset B$, gdy $A(x) \leqslant B(x)$ dla każdego $x \in X$.

(iv) *Dopełnieniem* zbioru rozmytego A nazywamy taki zbiór rozmyty A', że

$$A'(x) = 1 - A(x), \qquad x \in X.$$

(v) *Sumą* dwóch zbiorów rozmytych A i B jest zbiór rozmyty C zdefiniowany wzorem

$$C(x) = \max(A(x), B(x)), \qquad x \in X.$$

(vi) *Przekrojem* dwóch zbiorów rozmytych A i B jest zbiór rozmyty C zdefiniowany wzorem

$$C(x) = \min(A(x), B(x)), \qquad x \in X.$$

W ogólności jeżeli $(L, \leqslant_L)$ jest kratą (zupełną), to rodzina zbiorów rozmytych $(L(X), \leqslant)$ także tworzy kratę (zupełną) (zob. [41], twierdzenia 2.9.1 oraz 2.9.3). Tym samym tak określone operacje mają typowe własności klasycznego rachunku zbiorów (zob. [41], twierdzenia 2.9.2 i 2.9.4).

Okazuje się jednak, że nie są to jedyne możliwe rozszerzenia dopełnienia, sumy i iloczynu na zbiory rozmyte. Poniżej omawiamy najczęściej stosowane uogólnione operatory – będziemy je intensywnie wykorzystywać w dalszej części tej dysertacji.

1.2.2 Rozmyte operatory logiczne

Definicja 1.14 (por. Fodor et al. [45]). (i) Niech $\mathcal{L} = (L, \leqslant_L)$ będzie kratą zupełną. Funkcję $\mathcal{N}\colon L \to L$ nazywamy *negacją rozmytą*, gdy zachodzi $\mathcal{N}(0) = 1$, $\mathcal{N}(1) = 0$ oraz $\mathcal{N}$ jest malejąca.

(ii) Negację $\mathcal{N}$ nazywamy *negacją silną*, gdy jest inwolucją, to znaczy

$$\mathcal{N}(\mathcal{N}(x)) = x, \qquad x \in L.$$

W przypadku klasycznym rozważa się jeszcze jedną podklasę negacji.

Definicja 1.15 (zob. Fodor et al. [45]). Negację $N\colon [0,1] \to [0,1]$ nazywamy *negacją ścisłą*, gdy jest ciągła oraz ściśle malejąca.

Można łatwo wykazać, że na odcinku $[0,1]$ dowolna negacja silna jest ścisła. Wynika to z faktu, że każda inwolucja jest bijekcją.

Przykład 1.16. Następujące funkcje, określone na odcinku $[0,1]$, spełniają warunki definicji 1.14:

$$N_1(x) = 1 - x,$$
$$N_2(x) = 1 - x^2,$$
$$N_3(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases}$$
$$N_4(x) = \begin{cases} 1, & x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Funkcja N_1 jest negacją silną i nazywana jest negacją klasyczną. Negacja N_2 jest ścisła, ale nie jest silna, natomiast odwzorowania N_3 oraz N_4 sa negacjami rozmytymi, ale nie są ścisłe (a tym samym nie mogą być silne).

W tym miejscu warto wspomnieć dwa twierdzenia charakteryzujące negacje silne.

Twierdzenie 1.17 (zob. Trillas [73]). *Funkcja $N\colon [0,1] \to [0,1]$ jest negacją silną wtedy i tylko wtedy, gdy jest sprzężona z negacją klasyczną $N(x) = 1 - x$, czyli istnieje takie $\varphi \in \Phi$, że*

$$N(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)), \qquad x \in [0,1].$$

Twierdzenie 1.18 (por. Bedregal [28, Theorem 5.3]). *Funkcja $\mathcal{N}\colon L^I \to L^I$ jest negacją silną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka negacja silna N określona na odcinku $[0,1]$, że*

$$\mathcal{N}([x_1, x_2]) = [N(x_2), N(x_1)], \qquad [x_1, x_2] \in L^I.$$

Ogólnie przyjętym uogólnieniem koniunkcji (przekroju zbiorów rozmytych) są normy trójkątne, nazywane w skrócie t-normami. Ich definicja została wprowadzona w latach 50-tych w trakcie badań nad przestrzeniami metrycznymi w ujęciu statystycznym (zob. [68]). Później okazało się, że są one dobrym modelem przekroju zbiorów rozmytych [29]. Podobnie ogólnie przyjętym uogólnieniem alternatywy (sumy zbiorów rozmytych) są konormy trójkątne, w skrócie nazywane t-konormami.

Definicja 1.19. Niech $\mathcal{L} = (L, \leqslant_L)$ będzie kratą zupełną. Operator $\mathcal{T}\colon L^2 \to L$ nazywamy *t-normą*, jeśli jest łączny, symetryczny, rosnący ze względu na obie zmienne oraz 1 jest jego elementem neutralnym, tj. $\mathcal{T}(1, x) = \mathcal{T}(x, 1) = x$, dla $x \in L$.

Definicja 1.20. Niech $\mathcal{L} = (L, \leqslant_L)$ będzie kratą zupełną. Operator $\mathcal{S}\colon L^2 \to L$ nazywamy *t-konormą*, jeśli jest łączny, symetryczny, rosnący ze względu na obie zmienne oraz 0 jest jego elementem neutralnym, tj. $\mathcal{S}(0, x) = \mathcal{S}(x, 0) = x$, dla $x \in L$.

Dla $L = [0, 1]$ rodziny obu tych funkcji zostały bardzo dobrze zbadane w ostatnim czterdziestoleciu i m.in. opisane w dwóch monografiach [52] oraz [2]. Podane poniżej twierdzenie przedstawia ogólne prawo De Morgana wiążące klasyczne normy i konormy trójkątne – wynik ten można w naturalny sposób uogólnić na kraty De Morgana (zob. [41, str. 35]).

Twierdzenie 1.21 (Klement et al. [52, Propostion 1.15])**.** *Funkcja $S\colon [0, 1]^2 \to [0, 1]$ jest t-konormą wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka t-norma T, że*

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y), \qquad x, y \in [0, 1].$$

Wśród wszystkich klasycznych ($L = [0, 1]$) t-norm (t-konorm) szczególnie ważną rodzinę stanowią t-normy (t-konormy) ciągłe i archimedesowe. Zawdzięczają to m.in. swojej eleganckiej reprezentacji za pomocą funkcji jednej zmiennej (nazywanej generatorem), udowodnionej po raz pierwszy przez matematyczkę C.H. Ling w 1965 roku [56], a tu przedstawionej w twierdzeniach 1.26 oraz 1.27.

Definicja 1.22 (Klement et al. [52])**.** Mówimy, że t-norma T jest

(i) *archimedesowa*, gdy dla wszystkich $x, y \in (0, 1)$ istnieje $n \in \mathbb{N}$, takie że $x_T^{[n]} < y$;

(ii) *ścisła*, gdy jest ciągła (por. twierdzenie 1.2) oraz ściśle monotoniczna, tj. $T(x, y) < T(x, z)$ dla $x > 0$ oraz $y < z$;

(iii) *nilpotentna*, gdy jest ciągła (por. twierdzenie 1.2) oraz każdy $x \in (0, 1)$ jest *elementem nilpotentnym* T, tj. istnieje $n \in \mathbb{N}$, takie że $x_T^{[n]} = 0$.

Podobnie definiujemy rodziny klasycznych t-konorm.

Definicja 1.23 (Klement et al. [52])**.** Mówimy, że t-konorma S jest

(i) *archimedesowa*, gdy dla wszystkich $x, y \in (0, 1)$ istnieje $n \in \mathbb{N}$, takie że $x_S^{[n]} > y$;

(ii) *ścisła*, gdy jest ciągła oraz ściśle monotoniczna;

(iii) *nilpotentna*, gdy jest ciągła oraz każdy $x \in (0, 1)$ jest *elementem nilpotentnym* S, tj. istnieje $n \in \mathbb{N}$, takie że $x_S^{[n]} = 0$.

Uwaga 1.24. (i) (por. Gottwald [49, Proposition 5.1.2]) T-norma ciągła T jest *archimedesowa*, gdy $T(x, x) < x$, dla $x \in (0, 1)$. Podobnie t-konorma ciągła S jest *archimedesowa*, gdy $S(x, x) > x$, dla $x \in (0, 1)$.

(ii) (por. Klement et al. [52, Proposition 2.15]) Jeśli t-norma/t-konorma jest ścisła lub nilpotentna, to jest archimedesowa. W przeciwną stronę, każda t-norma/t-konorma ciągła i archimedesowa jest ścisła lub nilpotentna.

Przykład 1.25. Poniżej przedstawiamy najważniejsze i najczęściej stosowane t-normy wraz z ich własnościami (por. [68] oraz [52]):

$$
\begin{aligned}
T_{\mathbf{M}}(x,y) &= M(x,y) = \min(x,y), && \text{(t-norma kratowa)}\\
T_{\mathbf{LK}}(x,y) &= W(x,y) = \max(x+y-1,0), && \text{(t-norma Łukasiewicza, jest nilpotentna)}\\
T_{\mathbf{P}}(x,y) &= \Pi(x,y) = x\cdot y, && \text{(t-norma algebraiczna (in. produktowa),}\\
& && \text{jest ścisła)}
\end{aligned}
$$

$$
T_{\mathbf{D}}(x,y) = Z(x,y) = \begin{cases} \min(x,y), & \max(x,y)=1,\\ 0, & \max(x,y)<1 \end{cases} \quad \begin{array}{l}\text{(t-norma skrajna (drastyczna),}\\ \text{jest archimedesowa, ale nie jest ciągła)}\end{array}
$$

Z twierdzenia 1.21 można łatwo wyprowadzić wzory na najważniejsze i najczęściej stosowane t-konormy:

$$
\begin{aligned}
S_{\mathbf{M}}(x,y) &= \max(x,y), && \text{(t-konorma kratowa)}\\
S_{\mathbf{LK}}(x,y) &= \min(x+y,1), && \text{(t-konorma Łukasiewicza, jest nilpotentna)}\\
S_{\mathbf{P}}(x,y) &= x+y-x\cdot y, && \text{(t-konorma algebraiczna, jest ścisła)}
\end{aligned}
$$

$$
S_{\mathbf{D}}(x,y) = \begin{cases} \max(x,y), & \min(x,y)=0,\\ 1, & \min(x,y)>0 \end{cases} \quad \begin{array}{l}\text{(t-konorma skrajna (drastyczna),}\\ \text{jest archimedesowa, ale nie jest ciągła)}\end{array}
$$

Jak już wspomnieliśmy wcześniej, dla t-norm (t-konorm) ciągłych i archimedesowych znana jest ich reprezentacja za pomocą funkcji jednej zmiennej.

Twierdzenie 1.26 (zob. Klement et al. [52, Theorem 5.1])**.** *T-norma T jest ciągła i archimedesowa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka ciągła i ściśle malejąca funkcja $t\colon [0,1]\to[0,\infty]$, że $t(1)=0$ oraz*

$$
T(x,y) = t^{-1}(\min(t(x)+t(y),t(0))), \qquad x,y\in[0,1]. \tag{1.1}
$$

Ponadto, funkcja t w powyższej reprezentacji jest określona jednoznacznie z dokładnością do dodatniej multyplikatywnej stałej i nazywamy ją ciągłym generatorem addytywnym t-normy T.

Twierdzenie 1.27 (zob. Klement et al. [52, Corollary 5.5])**.** *T-konorma S jest ciągła i archimedesowa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka ciągła i ściśle rosnąca funkcja $s\colon [0,1]\to[0,\infty]$, że $s(0)=0$ oraz*

$$
S(x,y) = s^{-1}(\min(s(x)+s(y),s(1))), \qquad x,y\in[0,1]. \tag{1.2}
$$

Ponadto, tak jak w twierdzeniu 1.26, funkcja s jest określona jednoznacznie z dokładnością do dodatniej multyplikatywnej stałej i nazywamy ją ciągłym generatorem addytywnym t-konormy S.

Nazwa „generator addytywny” może być myląca, gdyż sugeruje spełnianie addytywnego równania Cauchy'ego. Tym razem jednak owa „addytywność” w nazwie nawiązuje do postaci t-normy (1.1), w której występuje operacja dodawania. Istnieją też inne reprezentacje t-norm, np. te uwzględniające w swojej postaci mnożenie (i wówczas generatory nazywane są multyplikatywnymi, por. [52, Rozdział 3.2]).

T-normy (t-konormy) ciągłe i archimedesowe dzielą się na ścisłe i nilpotentne. Okazuje się, że podział ten jest zdeterminowany dokładnie przez graniczne wartości generatora addytywnego.

Uwaga 1.28 (zob. Klement et al. [52, Corollary 3.30]). (i) T jest t-normą ścisłą wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jej ciągły generator addytywny t spełnia $t(0) = \infty$, a S jest t-konormą ścisłą wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jej ciągły generator addytywny s spełnia $s(1) = \infty$.

(ii) T jest t-normą nilpotentną wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jej ciągły generator addytywny t spełnia $t(0) < \infty$, a S jest t-konormą nilpotentną wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jej ciągły generator addytywny s spełnia $s(1) < \infty$.

Przytoczymy jeszcze jedno twierdzenie, które jest krótkim wnioskiem z twierdzenia 1.27 oraz uwagi 1.28, a będziemy je wykorzystywać w tej postaci w dalszej części niniejszej rozprawy.

Twierdzenie 1.29 (por. Klement et al. [52, Corolarry 5.7]). *Funkcja S jest t-konormą nilpotentną wtedy i tylko wtedy, gdy S jest Φ-sprzężona do t-konormy Łukasiewicza, czyli istnieje takie $\varphi \in \Phi$, wyznaczone jednoznacznie, że*

$$S(x, y) = \varphi^{-1}(\min(\varphi(x) + \varphi(y), 1)), \qquad x, y \in [0, 1]. \tag{1.3}$$

Przedstawiamy w końcu bardzo ważny i ciekawy wynik – reprezentację t-norm ciągłych. Okazuje się, że każda t-norma ciągła jest sumą porządkową t-norm ciągłych i archimedesowych. Zatem badając t-normy ciągłe, wykorzystujemy wyniki uzyskane dla t-normy minimum oraz dla t-norm ciągłych i archimedesowych.

Twierdzenie 1.30 (zob. [49], [52, Theorem 5.11]). *Dla funkcji $T\colon [0, 1]^2 \to [0, 1]$ następujące dwa zdania są równoważne:*

(i) T jest t-normą ciągłą.

(ii) T jest jednoznacznie reprezentowalna jako suma porządkowa (ang. ordinal sum) ciągłych i archimedesowych t-norm, czyli istnieją jednoznacznie wyznaczony przeliczalny (skończony lub nieskończony) zbiór indeksów A, rodzina jednoznacznie wyznaczonych parami rozłącznych podprzedziałów otwartych $\{(a_m, b_m)\}_{m\in A}$ odcinka $[0, 1]$ oraz rodzina jednoznacznie wyznaczonych t-norm ciągłych i archimedesowych $(T_m)_{m\in A}$, takie że

$$T(x, y) = \begin{cases} a_m + (b_m - a_m) \cdot T_m(\frac{x-a_m}{b_m-a_m}, \frac{y-a_m}{b_m-a_m}), & x, y \in [a_m, b_m], \\ \min(x, y), & \textit{wpp.} \end{cases}$$

Wówczas piszemy $T = (\langle a_m, b_m, T_m\rangle)_{m\in A}$.

W szczególnym przypadku, gdy A jest zbiorem pustym, otrzymujemy $T = T_{\mathbf{M}}$. Druga szczególna sytuacja, gdy $A = \{1\}$ oraz $[a_1, b_1] = [0, 1]$, pociąga, że T jest t-normą ciągłą i archimedesową. W pozostałych przypadkach mówimy, że t-norma ciągła ma reprezentację właściwą. Podobną jak powyżej reprezentację można podać dla t-konorm ciągłych (zob. [52, Corollary 5.12]).

Uogólnieniem omówionych wcześniej dwóch rodzin operatorów, t-norm oraz t-konorm, są uninormy, wprowadzone do literatury w latach 90-tych ubiegłego wieku przez R. R. Yagera i A. Rybalova.

Definicja 1.31 (por. Yager et al. [79]). Niech $\mathcal{L} = (L, \leqslant_L)$ będzie kratą zupełną. Operator $\mathcal{U}\colon L^2 \to L$ nazywamy *uninormą*, jeśli jest łączny, symetryczny, rosnący ze względu na obie zmienne oraz jeśli istnieje $e \in L$, nazywane *elementem neutralnym* $\mathcal{U}$, takie że $\mathcal{U}(e, x) = \mathcal{U}(x, e) = x$ dla $x \in L$.

Uwaga 1.32. (i) Dla uninormy $\mathcal{U}$ na dowolnej kracie $\mathcal{L}$ element neutralny e jest wyznaczony jednoznacznie. Jeśli $e = 0$, to $\mathcal{U}$ jest *t-konormą*, a jeśli $e = 1$, to $\mathcal{U}$ jest *t-normą*.

(ii) Dla uninormy $\mathcal{U}$ na dowolnej kracie $\mathcal{L}$ zachodzi $\mathcal{U}(0,0) = 0$ oraz $\mathcal{U}(1,1) = 1$. Ponadto, dla uninormy U na $([0,1], \leqslant)$ otrzymujemy $U(0,1) \in \{0,1\}$. W ogólności, jeśli $\mathcal{U}(0,1) = 0$, to $\mathcal{U}$ nazywamy *koniunkcyjną* a jeśli $\mathcal{U}(0,1) = 1$, to $\mathcal{U}$ nazywamy *alternatywną*.

W literaturze można znaleźć wiele różnych klas uninorm: tzw. klasy $\mathcal{U}_{\mathbf{Min}}$ oraz $\mathcal{U}_{\mathbf{Max}}$, uninormy reprezentowalne, uninormy idempotentne, uninormy ciągłe na otwartym odcinku jednostkowym itd. (zob. [46] oraz [58]). W tej pracy zaprezentujemy dokładniej tylko jedną z nich, względem której rozdzielność implikacji będziemy omawiać szczegółowo w podrozdziale 2.2.3 oraz w rozdziale 4. Uninormy na $([0,1], \leqslant)$, które można przedstawić tak jak w poniższym twierdzeniu 1.33, nazywamy *uninormami reprezentowalnymi* (ang. *representable uninorms*).

Twierdzenie 1.33 (Fodor et al. [46, Theorem 3])**.** *Dla funkcji $U\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ następujące zdania są równoważne:*

(i) U jest ściśle rosnącą i ciągłą na $(0,1)^2$ uninormą z elementem neutralnym $e \in (0,1)$, taką że U jest samosprzężona, poza punktami $(0,1)$ oraz $(1,0)$, ze względu na silną negację N ze stałym punktem e, tj.

$$U(x,y) = N(U(N(x), N(y))), \qquad x, y \in [0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}.$$

(ii) U posiada ciągły generator addytywny, tj. istnieje taka ciągła i ściśle rosnąca funkcja $h\colon [0,1] \to [-\infty, \infty]$ (określona jednoznacznie z dokładnością do dodatniej stałej multyplikatywnej), że $h(0) = -\infty$, $h(e) = 0$ dla pewnego $e \in (0,1)$, $h(1) = \infty$ oraz albo

$$U(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in \{(0,1),(1,0)\}, \\ h^{-1}(h(x) + h(y)), & \textit{wpp}, \end{cases} \qquad x, y \in [0,1],$$

gdy U jest koniunkcyjna, albo

$$U(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in \{(0,1),(1,0)\}, \\ h^{-1}(h(x) + h(y)), & \textit{wpp}, \end{cases} \qquad x, y \in [0,1],$$

gdy U jest alternatywna.

Przykład 1.34 (Baczyński [8, Example 2.4])**.** Dla ciągłego addytywnego generatora postaci $h(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $x \in [0,1]$, otrzymujemy następującą koniunkcyjną uninormę reprezentowalną:

$$U(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in \{(0,1),(1,0)\}, \\ \dfrac{xy}{(1-x)(1-y) + xy}, & \text{wpp}, \end{cases} \qquad x, y \in [0,1],$$

oraz następującą alternatywną uninormę reprezentowalną:

$$U(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in \{(0,1),(1,0)\}, \\ \dfrac{xy}{(1-x)(1-y) + xy}, & \text{wpp}, \end{cases} \qquad x, y \in [0,1].$$

W obu przypadkach $e = \frac{1}{2}$ oraz $N(x) = 1 - x$ dla $x \in [0,1]$.

Uwaga 1.35. Zwróćmy uwagę na to, że skoro przeciwdziedziną ciągłych, addytywnych generatorów uninorm jest zbiór $[-\infty, \infty]$, to pojawia się potrzeba określenia wyniku dodawania $\infty + (-\infty)$. Gdyby owa suma była skończona, tj. gdyby istniała taka stała $c \in \mathbb{R}$, że $\infty + (-\infty) = c$, to chcąc zachować łączność dodawania, otrzymalibyśmy, że

$$c = \infty + (-\infty) = [\infty + \infty] + (-\infty) = \infty + [\infty + (-\infty)] = \infty + c = \infty,$$

sprzeczność. Istnieją zatem jedynie dwie możliwości, które będziemy oznaczali w pracy przez $(A-)$ oraz $(A+)$:

$$(-\infty) + \infty = \infty + (-\infty) = -\infty, \tag{$A-$}$$

$$(-\infty) + \infty = \infty + (-\infty) = \infty. \tag{$A+$}$$

Uwaga 1.36 (por. Baczyński [8, Remark 2.5])**.** Łatwo zauważyć, że jeśli uninorma reprezentowalna U jest koniunkcyjna oraz na przeciwdziedzinie generatora h przyjmiemy założenie $(A-)$, wówczas prawdziwy jest wzór

$$U(x, y) = h^{-1}(h(x) + h(y)), \qquad x, y \in [0, 1]. \tag{1.4}$$

Podobnie, ten sam wzór jest prawdziwy, jeśli uninorma reprezentowalna U jest alternatywna oraz na przeciwdziedzinie generatora h przyjmiemy założenie $(A+)$.

Jak już wiemy, szczególnym przypadkiem kraty zupełnej $\mathcal{L}$ jest krata $([0, 1], \leqslant)$. T-normy, t-konormy i uninormy określone na kracie $([0, 1], \leqslant)$ zwyczajowo oznaczamy wielkimi literami T, S oraz U. O ile nie będzie to zaznaczone inaczej, w niniejszej pracy wszystkie operatory określone będą właśnie na $([0, 1], \leqslant)$.

Uogólnieniem klasycznej implikacji na zbiory rozmyte jest rodzina implikacji rozmytych, która to w przypadku odcinka jednostkowego została szeroko opisana w monografii [18] (w ogólnej sytuacji zob. [59]). Przedstawimy tutaj niezbędne definicje i fakty, potrzebne w dalszej części naszej pracy.

Definicja 1.37 (por. [18, 36, 44, 59])**.** Niech $\mathcal{L} = (L, \leqslant_L)$ będzie kratą zupełną. Operator $\mathcal{I}\colon L^2 \to L$ nazywamy *implikacją rozmytą*, jeśli spełnia następujące warunki:

$$\mathcal{I} \text{ jest malejący ze względu na pierwszą zmienną,} \tag{I1}$$

$$\mathcal{I} \text{ jest rosnący ze względu na drugą zmienną,} \tag{I2}$$

$$\mathcal{I}(0, 0) = \mathcal{I}(1, 1) = 1 \quad \text{oraz} \quad \mathcal{I}(1, 0) = 0. \tag{I3}$$

Uwaga 1.38 (zob. Baczyński et al. [18])**.** Bezpośrednio z definicji możemy wywnioskować, że każda implikacja rozmyta $\mathcal{I}$ spełnia następujące warunki brzegowe:

$$\mathcal{I}(0, y) = 1, \qquad y \in L, \tag{LB}$$

$$\mathcal{I}(x, 1) = 1, \qquad x \in L. \tag{RB}$$

Stąd $\mathcal{I}$ spełnia także następujący warunek (ang. *normality condition*):

$$\mathcal{I}(0, 1) = 1. \tag{NC}$$

Zatem każda implikacja rozmyta określona na $([0, 1], \leqslant)$ ograniczona do zbioru $\{0, 1\}^2$ pokrywa się z klasyczną implikacją.

W literaturze przedmiotu wprowadzono i zbadano wiele różnych klas implikacji rozmytych. Poniżej przedstawimy te kilka z nich, które będą wykorzystane w dalszej części pracy. Dla ustalenia uwagi ograniczamy się tylko do sytuacji, gdy $L = [0,1]$.

Definicja 1.39 ([45], [49], [18])**.** Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy *(S,N)-implikacją*, gdy istnieją t-konorma S oraz negacja rozmyta N, takie że

$$I(x,y) = S(N(x),y)\ , \qquad\qquad x,y \in [0,1].$$

Jeżeli N jest silną negacją, to I nazywamy *implikacją silną* lub po prostu *S-implikacją*.

Definicja 1.40 ([45], [49], [18])**.** Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy *R-implikacją* (ang. *Residual implication*), gdy istnieje taka t-norma T, że

$$I(x,y) = \sup\{t \in [0,1] \mid T(x,t) \leqslant y\}\ , \qquad\qquad x,y \in [0,1].$$

Jeśli I jest generowana z t-normy T, to oznacza się ją często symbolem I_T.

Rodzina R-implikacji jest ściśle związana z definicją implikacji w kratach (por. [41, str. 52] oraz [18, Rozdział 2.5]). Warto w tym miejscu zauważyć, że w powyższych wzorach można zamiast S lub T użyć ogólniejszej uninormy U, co zaproponowali J. Fodor i B. De Baets w [35].

Definicja 1.41 (zob. Baczyński et al. [18, Rozdział 2.6])**.** Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy *QL-operacją* (ang. *Quantum Logic operation*), gdy istnieje taka t-norma T, t-konorma S oraz negacja rozmyta N, że

$$I(x,y) = S(N(x),T(x,y)), \qquad\qquad x,y \in [0,1].$$

Używamy tutaj sformułowania „operacja", gdyż nie wszystkie QL-operacje są implikacjami rozmytymi zgodnie z naszą definicją 1.37 (nawet jeśli wszystkie funkcje są ciągłe, a N jest negacją silną).

Innymi dobrze zbadanymi klasami implikacji wielowartościowych są np. f-implikacje i g-implikacje (zob. [78]), h-implikacje (zob. [60]) czy też implikacje oparte na sumie porządkowej (zob. Su et al. [71]). Tutaj podamy jeszcze definicję zaproponowanej przez R. R. Yagera [78] w 2006 roku rodziny f-implikacji.

Definicja 1.42 (zob. Yager [78])**.** Funkcję $f\colon [0,1] \to [0,\infty]$ nazywamy *f-generatorem*, jeśli jest ściśle malejąca, ciągła oraz spełnia warunek $f(1) = 0$. Funkcję *pseudo-odwrotną* do niej oznaczamy przez $f^{(-1)}$ i definiujemy wzorem:

$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} f^{-1}(x), & x \in [0, f(0)],\\ 0, & x \in (f(0),\infty]. \end{cases}$$

Definicja 1.43 (zob. Yager [78])**.** Funkcję $J_f\colon [0,1]^2 \to [0,1]$, zdefiniowaną za pomocą f-generatora następująco:

$$J_f(x,y) = f^{(-1)}(x \cdot f(y)), \qquad\qquad x,y \in [0,1],$$

wraz z założeniem, że $0 \cdot \infty = 0$, nazywamy *f-implikacją*.

Własności i charakteryzacje powyższych rodzin implikacji wielowartościowych można znaleźć w monografiach [45], [49] oraz [18]. Nie będziemy tutaj przytaczać tych wyników, gdyż to nie jest celem naszej pracy.

Implikacja rozmyta	(S,N)-implikacja	R-implikacja	QL-implikacja	f-implikacja
Implikacja Gödla $I_{\mathbf{GD}}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leqslant y \\ y, & x > y \end{cases}$	Nie	Tak	Nie	Nie
Implikacja Goguena $I_{\mathbf{GG}}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leqslant y \\ \frac{y}{x}, & x > y \end{cases}$	Nie	Tak	Nie	Nie
Implikacja Łukasiewicza $I_{\mathbf{LK}}(x,y) = \min(1, 1 - x + y)$	Tak	Tak	Tak	Nie
Implikacja Kleene-Dienes $I_{\mathbf{KD}}(x,y) = \max(1 - x, y)$	Tak	Nie	Tak	Nie
Implikacja Reichenbacha $I_{\mathbf{RC}}(x,y) = 1 - x + xy$	Tak	Nie	Tak	Tak
Implikacja Yagera $I_{\mathbf{YG}}(x,y) = \begin{cases} 1, & x = 0 \text{ oraz } y = 0 \\ y^x, & x > 0 \text{ lub } y > 0 \end{cases}$	Nie	Nie	Nie	Tak

Tabela 1.1: Przykłady implikacji rozmytych

Przykład 1.44 (por. Baczyński et al. [18])**.** W tabeli 1.1 podajemy przykłady najważniejszych implikacji rozmytych wraz z informacją, do której klasy należą.

W dalszej części rozprawy będzie przydatny jeszcze następujący wynik dotyczący specjalnej klasy R-implikacji.

Lemat 1.45 (Baczyński et al. [18, Lemma 2.5.22])**.** *Jeśli I_T jest R-implikacją generowaną z t-normy ścisłej T, wówczas I_T jest Φ-sprzężona do implikacji Goguena, czyli istnieje takie $\varphi \in \Phi$, wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do dodatniej stałej wykładniczej, że*

$$I_T(x,y) = (I_{\mathbf{GG}})_\varphi(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leqslant y, \\ \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}\right), & x > y, \end{cases} \tag{1.5}$$

dla wszystkich $x, y \in [0,1]$.

1.2.3 Działania rozkładalne dla kraty $\mathcal{L}^I$

Podamy teraz definicje t-norm, t-konorm oraz uninorm *rozkładalnych* określonych na kracie $\mathcal{L}^I$, względem których rozdzielność implikacji będziemy omawiać szczegółowo w podrozdziale 2.2.3 oraz rozdziale 4.

Definicja 1.46 (por. [37, 39, 43])**.** T-normę $\mathcal{T}$ na $\mathcal{L}^I$ nazywamy *rozkładalną*, jeśli istnieją t-normy T_1 oraz T_2 na $([0,1],\leqslant)$, takie że $T_1 \leqslant T_2$ oraz

$$\mathcal{T}(x,y) = \mathcal{T}([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = [T_1(x_1,y_1), T_2(x_2,y_2)], \qquad [x_1,x_2],[y_1,y_2] \in L^I.$$

Piszemy wówczas, że $\mathcal{T} = (T_1, T_2)$. W analogiczny sposób definiujemy *t-konormę rozkładalną* $\mathcal{S}$ oraz *uninormę rozkładalną* $\mathcal{U}$ na $\mathcal{L}^I$.

Warto tu zauważyć, że nie każda t-norma, t-konorma oraz uninorma na $\mathcal{L}^I$ jest rozkładalna.

Przykład 1.47 (por. Drygaś [43, Example 1 & 2])**.** Operator

$$\mathcal{T}(x,y) = [x_1 y_1, \max(0, x_2+y_2-1)], \qquad x,y \in L^I,$$

jest t-normą rozkładalną, $\mathcal{T} = (T_{\mathbf{P}}, T_{\mathbf{LK}})$. Natomiast t-norma Łukasiewicza

$$\mathcal{T}_W(x,y) = [\max(0, x_1+y_1-1), \min(1, x_2+1-y_1, y_2+1-x_1)], \qquad x,y \in L^I,$$

z pewnością nie jest rozkładalna, ponieważ druga współrzędna $\mathcal{T}_W(x,y)$ zależy również od x_1 oraz y_1.

Przedstawimy tutaj jeszcze dwa fakty dotyczące uninorm rozkładalnych.

Lemat 1.48 (Drygaś [43, Lemma 8])**.** *Jeśli* $\mathcal{U}$ *na* $\mathcal{L}^I$ *jest uninormą rozkładalną, to* $\mathcal{U}(0_{\mathcal{L}^I}, 1_{\mathcal{L}^I}) = 0_{\mathcal{L}^I}$ *lub* $\mathcal{U}(0_{\mathcal{L}^I}, 1_{\mathcal{L}^I}) = 1_{\mathcal{L}^I}$*, lub* $\mathcal{U}(0_{\mathcal{L}^I}, 1_{\mathcal{L}^I}) = [0,1]$.

Zatem nie istnieje taka uninorma rozkładalna $\mathcal{U} = (U_1, U_2)$ na $\mathcal{L}^I$, że U_1 jest alternatywna oraz U_2 jest koniunkcyjna. Ponadto zwróćmy uwagę, że inaczej niż w przypadku uninorm na $([0,1] \leqslant)$, istnieją uninormy na $\mathcal{L}^I$, które nie są ani koniunkcyjne, ani alternatywne.

Lemat 1.49. *Niech* $\mathcal{U} = (U_1, U_2)$ *będzie uninormą rozkładalną na* $\mathcal{L}^I$*. Jeśli* $U_1 = U_2$*, to* $\mathcal{U}$ *jest koniunkcyjna lub alternatywna.*

Dowód. Zgodnie z punktem (ii) w uwadze 1.32 dla uninormy U_1 na kracie $([0,1] \leqslant)$ zachodzi $U_1(1,0) \in \{0,1\}$. Jeśli $U_1(1,0) = 0$, czyli U_1 jest koniunkcyjna, to

$$\mathcal{U}(1_{\mathcal{L}^I}, 0_{\mathcal{L}^I}) = \mathcal{U}([1,1],[0,0]) = [U_1(1,0), U_1(1,0)] = [0,0] = 0_{\mathcal{L}^I},$$

więc $\mathcal{U}$ jest także koniunkcyjna. Podobnie, jeśli $U_1(1,0) = 1$, czyli U_1 jest alternatywna, to $\mathcal{U}(1_{\mathcal{L}^I}, 0_{\mathcal{L}^I}) = [1,1] = 1_{\mathcal{L}^I}$, czyli $\mathcal{U}$ jest również alternatywna. □

1.2.4 Wnioskowanie przybliżone oparte na logice rozmytej

Jednym z najczęstszych zastosowań logiki rozmytej jest wnioskowanie przybliżone, gdzie z nieprecyzyjnych faktów oraz rozmytych reguł otrzymujemy, najczęściej, nieprecyzyjne wnioski (zob. [42]). W logice klasycznej mamy wiele sposobów wnioskowania, a jednymi z bardziej znanych są reguły Modus Ponens (reguła odrywania dla implikacji) oraz Modus Tollens (reguła poprzedzania). Regułę Modus Ponens możemy symbolicznie zapisać następująco:

$$r_0 : \frac{\varphi \longrightarrow \psi, \varphi}{\psi},$$

gdzie φ, ψ są zdaniami, lub

$$\begin{array}{l|l} \text{Reguła} & \varphi \longrightarrow \psi \\ \text{Fakt} & \varphi \\ \hline \text{Wniosek} & \qquad\quad \psi \end{array}$$

Natomiast schemat wnioskowania Modus Tollens możemy przedstawić za pomocą następujących schematów:

$$r_0 : \frac{\varphi \longrightarrow \psi, \neg\psi}{\neg\varphi},$$

gdzie φ, ψ są zdaniami, lub

$$\begin{array}{l|l} \text{Reguła} & \varphi \longrightarrow \psi \\ \text{Fakt} & \qquad\quad \neg\psi \\ \hline \text{Wniosek} & \neg\varphi \end{array}$$

We wnioskowaniu przybliżonym opartym na logice rozmytej zakładamy, że zdaniom występujące w regułach odpowiadają pewne zbiory rozmyte. Zgodnie z ogólnie przyjętą formą regułę rozmytą w najprostszej postaci zapisuje się następująco:

$$\text{IF } \widetilde{x} \text{ is } A \text{ THEN } \widetilde{y} \text{ is } B,$$

gdzie $A \in F(X)$, $B \in F(Y)$ są zbiorami rozmytymi (X, Y – niepuste zbiory), x, y są tzw. zmiennymi lingwistycznymi, przy czym x nazywa się zmienną wejściową, a y zmienną wyjściową. Przykładowo taka reguła może mieć postać

$$\text{IF } \tilde{x} \text{ (temperatura) is } A \text{ (wysoka) THEN } \tilde{y} \text{ (ciśnienie) is } B \text{ (niskie) }.$$

Uogólnioną regułę Modus Ponens określa schemat wnioskowania

$$\begin{array}{l|l} \text{Reguła} & \text{IF } \widetilde{x} \text{ is } A \text{ THEN } \widetilde{y} \text{ is } B \\ \text{Fakt} & \quad\ \widetilde{x} \text{ is } A' \\ \hline \text{Wniosek} & \qquad\qquad\qquad\quad \widetilde{y} \text{ is } B', \end{array}$$

gdzie X, Y są niepustymi zbiorami (klasycznymi), $A, A' \in F(X)$, $B, B' \in F(Y)$ są zbiorami rozmytymi, natomiast $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ są zmiennymi lingwistycznymi.

Teraz, mając wejście „$\widetilde{x}$ is A'”, zadaniem mechanizmu wnioskowania jest uzyskanie rozmytego wyjścia B', które posiada pewne pożądane właściwości. W literaturze można znaleźć różne schematy wnioskowania, które realizują uogólnioną regułą Modus Ponens. Najważniejszymi z nich są rozmyte wnioskowanie relacyjne (ang. *fuzzy relational inference*) oraz rozumowanie oparte na podobieństwie (ang. *similarity based reasoning*). W pierwszym przypadku wnioskowany zbiór B' uzyskuje się najczęściej jako złożenie $\sup -T$ (inne oznaczenie to $\overset{T}{\circ}$) zbioru A' i danych reguł. Tak jest m.in. we wnioskowaniu opartym na złożeniu relacji rozmytych (ang. *Compositional Rule of Inference, CRI*) wprowadzonym przez Zadeha w 1973 r. (zob. [81]). W najprostszej postaci dla danej reguły rozmytej

$$\text{IF } \widetilde{x} \text{ is } A \text{ THEN } \widetilde{y} \text{ is } B$$

oraz faktu

$$\widetilde{x} \text{ is } A',$$

uogólniona reguła Modus Ponens pozwala otrzymać konkluzję

$$\widetilde{y} \text{ is } B'$$

w następujący sposób:

$$B'(y) = A'(x) \overset{T}{\circ} I(A(x), B(y)) = \sup_{x \in X} T(A'(x), I(A(x), B(y))),$$

gdzie A, A' i B, B' są podzbiorami rozmytymi w przestrzeniach wejść i wyjść systemu oraz T jest uogólnieniem koniunkcji (najczęściej jakąś t-normą), natomiast I jest uogólnieniem implikacji (najczęściej jakaś implikacją rozmytą).

Należy zaznaczyć, że w praktyce stosuje się system MISO (ang. *Multi-Input Single-Output*), w którym danych jest m reguł rozmytych z n dziedzinami wejściowymi X_j; zapisuje się je w następującej postaci:

$$\begin{aligned} R_i : \text{IF } \widetilde{x}_1 \text{ is } A_{i_1} \text{ AND } \widetilde{x}_2 \text{ is } A_{i_2} \text{ AND } \ldots \text{ AND } \widetilde{x}_n \text{ is } A_{i_n} \\ \text{THEN } \widetilde{y} \text{ is } B_i \text{ ,} \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, m, \end{aligned}$$

gdzie $A_{i_j} \in F(X_j)$, $B_i \in F(Y)$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, oraz odpowiadające temu relacje rozmyte R_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, są dane wzorem

$$R_i(x_1, x_2, \ldots x_n; y) = I(A_{i_1}(x_1) \odot A_{i_2}(x_2) \odot \ldots A_{i_n}(x_n), B_i(y)) \ ,$$

przy czym I oznacza tutaj znowu implikację rozmytą, a $\odot$ jest zazwyczaj t-normą (niekoniecznie tą samą co T).

W końcu do obliczenia wyniku B' we wnioskowaniu przybliżonym można stosować złożenie $\inf -I$ zbioru A' i danych reguł, jak we wnioskowaniu Bandlera-Kohouta (ang. *Bandlera-Kohouta Subproduct, BKS*) (zob. [27]). Przegląd metod stosowanych we wnioskowaniu rozmytym można znaleźć w dowolnym podręczniku opisującym zastosowania logiki rozmytej.

1.3 Znaczenie rozdzielności implikacji rozmytych w logice rozmytej

W. E. Combs oraz J. E. Andrews [34] w oparciu o prawa rozdzielności implikacji (wielowartościowych) względem koniunkcji (wielowartościowych) zaproponowali mechanizm wnioskowania mający na celu zmniejszenie złożoności obliczeniowej działania reguł rozmytych we wnioskowaniu przybliżonym opartym na opisanej wcześniej metodzie CRI.

Przykład 1.50 (Baczyński et al. [18])**.** Rozważmy system rozmyty z dwoma wejściami i jednym wyjściem. Załóżmy, że reguły są zapisane w postaci tabeli:

–	B_1	B_2
A_1	C	D
A_2	E	F

W sumie są to cztery reguły, a przykładowo jedna z nich jest następującej postaci:

$$\text{IF } \widetilde{x} \text{ is } A_1 \text{ AND } \widetilde{y} \text{ is } B_1 \text{ THEN } \widetilde{z} \text{ is } C.$$

W. E. Combs oraz J. E. Andrews zaproponowali, aby zgodnie z prawem rozdzielności

$$(p \wedge q) \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r),$$

rozbić ten system na następujące reguły:

$$\begin{aligned} A_1 &\longrightarrow C, & A_1 &\longrightarrow D, \\ B_1 &\longrightarrow C, & B_1 &\longrightarrow E, \\ A_2 &\longrightarrow E, & A_2 &\longrightarrow F, \\ B_2 &\longrightarrow D, & B_2 &\longrightarrow F. \end{aligned}$$

Zakładamy, że reguły te są połączone alternatywą (tutaj konkretnie klasyczną t-konormą maksimum), dlatego wynik G możemy obliczyć wg formuły:

$$\begin{aligned} G =& A' \overset{T}{\circ} ((A_1 \longrightarrow C) \vee (A_1 \longrightarrow D) \vee (A_2 \longrightarrow E) \vee (A_2 \longrightarrow F)) \\ & \vee\ B' \overset{T}{\circ} ((B_1 \longrightarrow C) \vee (B_1 \longrightarrow E) \vee (B_2 \longrightarrow F) \vee (B_2 \longrightarrow D)). \end{aligned}$$

Załóżmy, że pomiędzy zbiorami C, D, E oraz F zachodzą następujące relacje zawierania (zob. Definicja 1.13):

$$C \leqslant D, \qquad C \leqslant E, \qquad D \leqslant F, \qquad E \leqslant F.$$

W konsekwencji korzystając ponownie z rozdzielności

$$r \to (s \vee t) \equiv (r \to s) \vee (r \to t),$$

otrzymujemy

$$G = A' \overset{T}{\circ} ((A_1 \longrightarrow D) \vee (A_2 \longrightarrow F)) \vee\ B' \overset{T}{\circ} ((B_1 \longrightarrow E) \vee (B_2 \longrightarrow F)).$$

Ten wynik może być rozumiany jako działanie systemu dla następującej tabeli reguł:

X :	$A_1 \longrightarrow D$	$A_2 \longrightarrow F$
Y :	$B_1 \longrightarrow E$	$B_2 \longrightarrow F$

Zatem nadal mamy cztery reguły, ale sa one prostszej postaci (z jednym parametrem w miejsce dwóch), a tym samym złożoność obliczeniowa operacji uzyskiwania wniosku zmniejszyła się.

Praca [34] wywołała burzliwą dyskusję na temat zastosowania tej reguły w praktyce. Wynika to z faktu, że dowolna implikacja rozmyta jest odpowiednio rozdzielna względem maksimum/minimum, ale niestety nie jest tak, że dowolna implikacja rozmyta jest rozdzielna względem dowolnej t-konormy/t-normy. Na przykład dla t-konormy Łukasiewicza $S_{\mathbf{LK}}$, implikacji Łukasiewicza $I_{\mathbf{LK}}$ oraz dla $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$ i $z = \frac{1}{8}$ z jednej strony dostajemy

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{LK}}(x, S_{\mathbf{LK}}(y,z)) &= I_{\mathbf{LK}}\left(\frac{1}{2}, S_{\mathbf{LK}}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)\right) = I_{\mathbf{LK}}\left(\frac{1}{2}, \min\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}, 1\right)\right) \\ &= I_{\mathbf{LK}}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right) = \min\left(1, 1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right) = \frac{7}{8}, \end{aligned}$$

natomiast z drugiej strony

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{LK}}(I_{\mathbf{LK}}(x,y), I_{\mathbf{LK}}(x,z)) &= S_{\mathbf{LK}}\left(I_{\mathbf{LK}}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right), I_{\mathbf{LK}}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right)\right) \\ &= S_{\mathbf{LK}}\left(I_{\mathbf{LK}}\left(\min\left(1, 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right), \min\left(1, 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)\right)\right) \\ &= S_{\mathbf{LK}}\left(\frac{3}{4},\frac{5}{8}\right) = \min\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{8}, 1\right) = 1, \end{aligned}$$

czyli dla tych wartości nie zachodzi stosowne prawo rozdzielności (D2). W konsekwencji w artykule [40] możemy znaleźć zdanie:

> *„Future work on this issue will require an examination of the properties of various combinations of fuzzy unions, intersections and implications”*
> *(Dalsza praca nad tym zagadnieniem wymagać będzie zbadania tych własności dla różnych kombinacji sum, przecięć oraz implikacji),*

zaś w artykule [62] znajdujemy takie sformułowanie:

> *„We think that what this all means is that we have to look past the mathematics of IRC $\Leftrightarrow$ URC and inquire whether what we are doing when we replace IRC by URC makes sense”*
> *(Myślimy, że wszystko to oznacza, że trzeba przyjrzeć się z punktu widzenia matematyki równoważności IRC $\Leftrightarrow$ URC i stwierdzić, czy to co robimy, zastępując IRC przez URC, jest sensowne).*

W literaturze można znaleźć również odpowiedzi W. E. Combsa i J. E. Andrewsa na postawione im pytania oraz uwagi (zob. [32], [33]). Ich metoda została później uogólniona przez B. Jayarama do wnioskowania opartego na podobieństwie, czyli SBR (zob. [51]).

Rozdział 2

Historia badań nad rozdzielnością implikacji rozmytych

Badania nad rozdzielnością implikacji rozmytych, które zostały zapoczątkowane w 1998 roku pracą W. E. Combsa i J. E. Andrewsa [34], wskazującą na ważne zastosowanie tej własności we wnioskowaniu przybliżonym, zaangażowały przez ostatnie 15 lat szerokie grono badaczy. Dotąd badania te koncentrują się na klasycznym przypadku operatorów określonych na kracie $([0,1], \leqslant)$, chociaż w ostatnich latach pojawiły się również pierwsze prace, w których rozważa się operatory określone na kracie $\mathcal{L}^I$. Wszystkie wyniki można podzielić na dwa główne równoległe nurty: pierwszy, w którym przyjmuje się, że implikacja I jest dana, a poszukiwanymi rozwiązaniami są t-normy i t-konormy (lub inne ogólniejsze operatory), oraz drugi, w którym zakłada się, że dane są wszystkie operatory poza poszukiwanymi implikacjami.

Powyższemu podziałowi odpowiadają dwa kolejne podrozdziały. Wyniki dotyczące przypadku, gdy funkcja I jest dana, omówione w podrozdziale 2.1, przedstawione są w zwięzły sposób. Zacytowane są jedynie najważniejsze twierdzenia oraz zaprezentowany jest ogólny zarys badań. Pewne wyniki z tej części przedyskutowane są także w rozdziale 5. Natomiast przypadek, gdy I jest szukana, przedstawiony jest dokładniej – z równań rozdzielności (D1) - (D4) wyprowadzone są rozmaite bardziej elementarne równania funkcyjne oraz zaprezentowanych jest wiele twierdzeń, niektóre z nich wraz z dowodami. Wynika to z tego, że w rozdziałach 3 i 4 niniejszej pracy wielokrotnie będziemy uogólniać lub uzupełniać wyniki zawarte w podrozdziale 2.2, często wykorzystując je także w nowych dowodach.

2.1 Implikacja I jest dana

Wśród wszystkich implikacji rozmytych najważniejszymi i najdokładniej zbadanymi rodzinami są (S,N)-implikacje, R-implikacje oraz QL-implikacje, których definicje zostały przedstawione w rozdziale 1 – są to odpowiednio definicje 1.39, 1.40 oraz 1.41. Rozdzielność implikacji z powyższych rodzin względem t-norm i t-konorm została dokładnie zbadana w latach 2002-2004 przez E. Trillasa, C. Alsinę, B. Jayarama oraz C. J. M. Rao [74, 26].

Najpierw E. Trillas oraz C. Alsina rozwiązali równanie rozdzielności (D3), tj. $I(T(x,y),z) = S(I(x,z), I(y,z))$, $x,y,z \in [0,1]$, gdy I jest (S,N)-implikacją generowaną z silnej negacji N (czyli I jest S-implikacją), gdy I jest R-implikacją generowaną z ciągłej t-normy lub gdy I jest QL-implikacją generowaną z ciągłych funkcji i silnej negacji N. Otrzymali oni we wszystkich tych przypadkach, że jeśli trójka funkcji (I, S, T) spełnia równanie (D3), to $S = \max$ oraz $T = \min$. Ponadto jeśli I jest ciągłą QL-implikacją (oraz N jest silna), to t-konorma generująca I – oznaczmy ją przez S_I – spełnia prawo wyłączonego środka wraz z daną negacją N, tj. $S_I(N(x), x) = 1$ dla wszystkich $x \in [0, 1]$ (w logice klasycznej odpowiada temu tautologia $p \vee \neg p$). Wykorzystując charakteryzację rozwiązań prawa wyłączonego środka (por. [18, Proposition 2.3.12]), otrzymuje się, że S_I musi być sprzężona do t-konormy Łukasiewicza $S_{\mathbf{LK}}$.

B. Jayaram wraz z C. J. M. Rao kontynuowali badania rozpoczęte przez E. Trillasa oraz C. Alsinę, rozwiązując pozostałe trzy równania rozdzielności dla S-implikacji oraz R-implikacji. W poniższych czterech twierdzeniach odpowiadających czterem równaniom rozdzielności (D1) - (D4) prezentujemy ich najważniejsze wyniki. W pierwszych trzech z nich zakładamy za każdym razem, że $I\colon [0, 1]^2 \to [0, 1]$ jest S-implikacją opartą na negacji silnej N i t-konormie ciągłej S lub R-implikacją opartą na ciągłej t-normie T oraz że $S, T, T_1, T_2\colon [0, 1]^2 \to [0, 1]$ są t-normami i t-konormami.

Twierdzenie 2.1 (por. [74], [26, Theorem 1])**.** *Trójka funkcji* (I, S, T) *spełnia równanie* (D3)*, tj.* $I(T(x, y), z) = S(I(x, z), I(y, z))$ *dla wszystkich* $x, y, z \in [0, 1]$*, wtedy i tylko wtedy, gdy* $T = \min$ *oraz* $S = \max$.

Twierdzenie 2.2 (zob. Jayaram et al. [26, Theorem 2])**.** *Trójka funkcji* (I, S, T) *spełnia równanie* (D4)*, tj.* $I(S(x, y), z) = T(I(x, z), I(y, z))$ *dla wszystkich* $x, y, z \in [0, 1]$*, wtedy i tylko wtedy, gdy* $T = \min$ *oraz* $S = \max$.

Twierdzenie 2.3 (zob. Jayaram et al. [26, Theorem 3])**.** *Trójka funkcji* (I, T_1, T_2) *spełnia równanie* (D1)*, tj.* $I(x, T_1(y, z)) = T_2(I(x, y), I(x, z))$ *dla wszystkich* $x, y, z \in [0, 1]$*, wtedy i tylko wtedy, gdy* $T_1 = T_2 = \min$.

Twierdzenie 2.4 (zob. Jayaram et al. [26, Theorem 4])**.** *Niech* $I\colon [0, 1]^2 \to [0, 1]$ *będzie S-implikacją opartą na negacji ścisłej* N *i t-konormie ciągłej* S *lub R-implikacją opartą na t-normie* nilpotentnej T*. Ponadto niech* $S_1, S_2\colon [0, 1]^2 \to [0, 1]$ *będą t-konormami. Trójka funkcji* (I, S_1, S_2) *spełnia równanie* (D2)*, tj.* $I(x, S_1(y, z)) = S_2(I(x, y), I(x, z))$ *dla wszystkich* $x, y, z \in [0, 1]$*, wtedy i tylko wtedy, gdy* $S_1 = S_2 = \max$.

Przypadek, gdy I jest R-implikacją generowaną z t-normy ścisłej, pozostał problemem otwartym. Rozwiązali go prawie kompletnie w 2009 roku M. Baczyński wraz z B. Jayaramem [19], uzyskując znacznie więcej rozwiązań niż tylko $S_1 = S_2 = \max$. Również Autorka zajęła się badaniem tego problemu i cały rozdział 5 poświęcony jest dyskusji na ten temat.

W kolejnych latach proponowane były coraz to nowe rodziny implikacji rozmytych. Za każdym razem badano ich podstawowe własności, a wśród nich często rozdzielność względem t-norm, t-konorm lub innych operatorów. Wymienimy tutaj kilka wybranych rodzin.

W 2006 roku D. Ruiz-Aguilera oraz J. Torrens [65] zbadali ogólniejsze równanie rozdzielności

$$I(U_c(x, y), z) = U_d(I(x, z), (y, z)), \tag{2.1}$$

gdzie U_c jest uninormą koniunkcyjną oraz U_d jest uninormą alternatywną, przy założeniu, że dana jest implikacja I generowana z uninormy alternatywnej U wzorem $I(x, y) = U(N(x), y)$, gdzie N jest silną negacją – czyli I jest ogólniejszą wersją S-implikacji (por. definicja 1.39), w której t-konorma S zastąpiona jest przez uninormę alternatywną U. W 2007 roku ci sami autorzy zbadali równanie (2.1) także dla uogólnionej wersji R-implikacji (por. definicja 1.40), tj. funkcji I danej wzorem $I(x, y) = \sup\{z \in [0,1] \mid U(x, z) \leqslant y\}$, gdzie U jest uninormą koniunkcyjną [66].

Również w roku 2007 opublikowana została praca autorstwa B. Jayarama (pod nazwiskiem Balasubramaniam) [25]. Zbadana w niej została rozdzielność dopiero co zaproponowanej przez R. Yagera nowej rodziny f-implikacji (por. definicja 1.43). Uzyskano wyniki zbliżone do wyników z prac [74, 26] dla S-implikacji oraz R-implikacji. Mianowicie niech I będzie f-implikacją (generowaną przez funkcję f), a S, S_1, S_2, T, T_1, T_2 będą t-konormami oraz t-normami. Równania (D3) oraz (D4) są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $S = \max$ oraz $T = \min$ (por. [25, Theorem 3, Theorem 4]), natomiast równania (D1) i (D2) zbadano oddzielnie dla dwóch przypadków – gdy $f(0) < \infty$ oraz $f(0) = \infty$. Gdy $f(0) < \infty$, to oba równania są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $T_1 = T_2 = \min$ oraz $S_1 = S_2 = \max$, odpowiednio (por. [25, Theorem 7, Theorem 8]). W przypadku, gdy $f(0) = \infty$, wyniki są bardziej złożone. Równanie (D1) jest spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $T_1 = T_2 = T$ oraz $T = \min$ lub T jest t-normą generowaną przez funkcję f jako addytywny generator, tj. $T(x, y) = f^{(-1)}(f(x) + f(y))$. Rozwiązanie równania (D2), gdy $f(0) = \infty$, pozostaje zaś problemem otwartym.

Po kilku latach, w roku 2012 S. Massanet oraz J. Torrens przedstawili wyniki dotyczące rozdzielności nowej klasy implikacji rozmytych generowanych z dwóch danych implikacji (ang. *threshold generated implications*) [61]. Natomiast w ostatnich dwóch latach zagadnieniami związanymi z rozdzielnością implikacji zajęło się kilka grup badaczy chińskich. W 2013 roku H. Liu, F. Zhang oraz A. Xie zbadali rozdzielność trzech nowych klas implikacji – (f, g)-implikacji uogólniających f-implikacje [75], (g, u)-implikacji uogólniających g-implikacje R. Yagera [82] oraz h^{-1}-implikacji [57]. Wreszcie zupełnie niedawno, w 2015 roku, Y. Su, W. Zong oraz H. Liu zbadali rozdzielność implikacji będących sumami porządkowymi innych implikacji [72]. Jak widać, ów temat badań wciąż nie jest wyczerpany.

2.2 Implikacja I jest szukana

Pierwsza praca prezentująca rozwiązania jednego z równań rozdzielności w zbiorze operatorów rozmytych została opublikowana jeszcze w 1998 roku przez I. B. Türksena, V. Kreinovicha oraz R. R. Yagera [50]. Rozwiązali oni równanie (D1) w szczególnym przypadku, gdy obie występujące w nim t-normy są produktowe. Następnie w latach 2001 i 2002 M. Baczyński rozwiązał to samo równanie dla t-norm ścisłych oraz implikacji ciągłych lub ciągłych z wyjątkiem pewnych brzegowych punktów [5, 6].

Wśród t-norm oraz t-konorm określonych na klasycznej kracie $([0, 1], \leqslant)$ najważniejszą rodzinę stanowią t-normy oraz t-konormy ciągłe i archimedesowe. Zawdzięczają to m.in. swojej wygodnej reprezentacji za pomocą funkcji jednej zmiennej, przedstawionej w twierdzeniach 1.26 oraz 1.27. Reprezentacja ta pozwoliła również w 2009 i 2010 roku na kompletne rozwiązanie wszystkich równań rozdzielności (D1) - (D4) w przypadku, gdy dane są operatory z tych rodzin [19, 7]. Przegląd wyników dla t-norm oraz t-konorm ciągłych i archimedesowych przedstawiony jest w podrozdziale 2.2.1.

Ogólniej, w przypadku, gdy jedna z t-norm lub t-konorm jest tylko ciągła, a nie jest archimedesowa, a następnie w przypadku, gdy obie t-normy i t-konormy są tylko ciągłe, równania rozdzielności zostały rozwiązane w latach 2012 i 2013 przez M. Baczyńskiego, F. Qin oraz A. Xie [64, 16, 63]. Wykorzystali oni charakteryzację operatorów ciągłych za pomocą operatorów ciągłych i archimedesowych (por. definicja 1.30). Najważniejsze wyniki przedstawione są w podrozdziale 2.2.2.

Równolegle od 2010 roku równania rozdzielności zaczęto badać w rodzinach operatorów uogólnianych na kolejne dwa sposoby: poprzez rozważanie uninorm reprezentowalnych w miejsce t-norm oraz t-konorm ciągłych i archimedesowych oraz poprzez badanie rozdzielności implikacji względem t-norm i t-konorm na kracie zupełnej $\mathcal{L}^I$ w miejsce klasycznej kraty $([0,1], \leqslant)$. Przegląd odpowiednich wyników jest treścią kolejnych podrozdziałów (2.2.3 oraz 2.2.4).

2.2.1 Równania rozdzielności dla ciągłych i archimedesowych t-norm oraz t-konorm

Jeśli rozważymy równania rozdzielności wewnątrz rodzin ciągłych i archimedesowych t-norm oraz t-konorm, wówczas używając wygodnej charakteryzacji z twierdzeń 1.26 i 1.27, będziemy mogli przekształcić równania (D1) - (D4) do prostszej postaci. Przyjrzymy się teraz temu przekształceniu.

Niech t, t_1, t_2 będą ciągłymi, addytywnymi generatorami t-norm T, T_1 i T_2, oraz niech s, s_1, s_2 będą ciągłymi, addytywnymi generatorami t-konorm S, S_1 i S_2, odpowiednio. Wówczas równania (D1) - (D4) możemy zapisać w następującej postaci:

$$
\begin{aligned}
I(x, t_1^{-1}(\min(t_1(y) + t_1(z), t_1(0)))) &= t_2^{-1}(\min(t_2(I(x,y)) + t_2(I(x,z)), t_2(0))),\\
I(x, s_1^{-1}(\min(s_1(y) + s_1(z), s_1(1)))) &= s_2^{-1}(\min(s_2(I(x,y)) + s_2(I(x,z)), s_2(1))),\\
I(t^{-1}(\min(t(x) + t(y), t(0))), z) &= s^{-1}(\min(s(I(x,z)) + s(I(y,z)), s(1))),\\
I(s^{-1}(\min(s(x) + s(y), s(1))), z) &= t^{-1}(\min(t(I(x,z)) + t(I(y,z)), t(0))).
\end{aligned}
$$

Następnie oznaczmy przez f_x, g_x, h^z oraz k^z, dla ustalonych $x, z \in [0,1]$, następujące funkcje:

- $f_x(\,\cdot\,) := t_2 \circ I(x, t_1^{-1}(\,\cdot\,))$,
- $g_x(\,\cdot\,) := s_2 \circ I(x, s_1^{-1}(\,\cdot\,))$,
- $h^z(\,\cdot\,) := s \circ I(t^{-1}(\,\cdot\,), z)$,
- $k^z(\,\cdot\,) := t \circ I(s^{-1}(\,\cdot\,), z)$.

Wstawiając je do powyższych czterech równań rozdzielności, otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
f_x(\min(t_1(y) + t_1(z), t_1(0))) &= \min(f_x(t_1(y)) + f_x(t_1(z)), t_2(0)),\\
g_x(\min(s_1(y) + s_1(z), s_1(1))) &= \min(g_x(s_1(y)) + g_x(s_1(z)), s_2(1)),\\
h^z(\min(t(x) + t(y), t(0))) &= \min(h^z(t(x)) + h^z(t(y)), s(1)),\\
k^z(\min(s(x) + s(y), s(1))) &= \min(k^z(s(x)) + k^z(s(y)), t(0)).
\end{aligned}
$$

Pierwsze z owych równań możemy przepisać w następującej formie:

$$
f_x(\min(u_1 + v_1, t_1(0))) = \min(f_x(u_1) + f_x(v_1), t_2(0)),
$$

gdzie $u_1, v_1 \in [0, t_1(0)]$, oraz f_x jest nieznaną funkcją dla ustalonego $x \in [0,1]$. Pozostałe trzy równania możemy przepisać w podobny sposób:

$$
\begin{aligned}
g_x(\min(u_2 + v_2, s_1(1))) &= \min(g_x(u_2) + g_x(v_2), s_2(1)),\\
h^z(\min(u_3 + v_3, t(0))) &= \min(h^z(u_3) + h^z(v_3), s(1)),\\
k^z(\min(u_4 + v_4, s(1))) &= \min(k^z(u_4) + k^z(v_4), t(0)),
\end{aligned}
$$

gdzie $u_2, v_2 \in [0, s_1(1)]$, $u_3, v_3 \in [0, t(0)]$, $u_4, v_4 \in [0, s(1)]$ oraz g_x, h^z, k^z są nieznanymi funkcjami. Wszystkie te równania mają w ogólności tę samą postać

$$f(\min(x + y, r_1)) = \min(f(x) + f(y), r_2), \tag{2.2}$$

gdzie $x, y \in [0, r_1]$, $r_1, r_2 \in (0, \infty]$, a $f\colon [0, r_1] \to [0, r_2]$ jest nieznaną funkcją. Mając na uwadze to, że ciągłe, addytywne generatory t-norm oraz t-konorm ścisłych zgodnie z uwagą 1.28 osiągają nieskończoną wartość, podczas gdy ciągłe, addytywne generatory operatorów nilpotentnych są skończone, pamiętamy, że stałe r_1, r_2 również mogą być skończone lub nieskończone. Dlatego z równania (2.2) możemy właściwie wyszczególnić cztery różne równania funkcyjne:

$$f(\min(x + y, r_1)) = \min(f(x) + f(y), r_2), \qquad f\colon [0, r_1] \to [0, r_2], \tag{2.3}$$

$$f(x + y) = \min(f(x) + f(y), r_2), \qquad f\colon [0, \infty] \to [0, r_2], \tag{2.4}$$

$$f(\min(x + y, r_1)) = f(x) + f(y), \qquad f\colon [0, r_1] \to [0, \infty], \tag{2.5}$$

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \qquad f\colon [0, \infty] \to [0, \infty], \tag{2.6}$$

gdzie tym razem zakładamy już, że $r_1, r_2 \in (0, \infty)$. Zauważmy, że równanie (2.6) jest klasycznym równaniem Cauchy'ego – z tym wyjątkiem, że funkcja f jest tutaj określona na zbiorach, na których równanie Cauchy'ego nie było wcześniej badane. W dalszej części pracy jednowymiarowe równanie Cauchy'ego bez wyszczególnionych zbiorów, na których równanie to jest spełnione, będziemy oznaczali także przez (C).

Równania (2.3) i (2.6) zostały rozwiązane przez M. Baczyńskiego oraz B. Jayarama w 2009 roku w pracy [19], podczas gdy równania (2.4) i (2.5) przez M. Baczyńskiego w 2010 roku w pracy [7]. Zacytujemy tutaj uzyskane w tych pracach wyniki. Będziemy się do nich odwoływać w rozdziale 3.

Twierdzenie 2.5 (Baczyński et al. [19, Proposition 3]). *Niech $r_1, r_2 \in (0, \infty)$. Dla funkcji $f\colon [0, r_1] \to [0, r_2]$ następujące zdania są równoważne:*

(i) Funkcja f spełnia równanie funkcyjne (2.3) *dla $x, y \in [0, r_1]$.*

(ii) Zachodzi $f = r_2$ lub $f = 0$, lub

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ r_2, & x > 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

lub istnieje taka jednoznacznie wyznaczona stała $k \in [r_2/r_1, \infty)$, że

$$f(x) = \min(kx, r_2), \tag{2.8}$$

dla $x \in [0, r_1]$.

Twierdzenie 2.6 (Baczyński et al. [7, Proposition 3.4]). *Niech $r_2 \in (0, \infty)$. Dla funkcji $f\colon [0, \infty] \to [0, r_2]$ następujące zdania są równoważne:*

(i) Funkcja f spełnia równanie funkcyjne (2.4) *dla $x, y \in [0, \infty]$.*

(ii) Zachodzi $f = r_2$ lub $f = 0$, lub f przyjmuje postać (2.7)*, lub*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < \infty, \\ r_2, & x = \infty, \end{cases} \tag{2.9}$$

lub istnieje taka jednoznacznie wyznaczona stała $k \in (0, \infty)$, że f przyjmuje postać (2.8), dla $x \in [0, \infty]$.

Twierdzenie 2.7 (Baczyński et al. [7, Proposition 3.6]). *Niech $r_1 \in (0, \infty)$. Dla funkcji $f\colon [0, r_1] \to [0, \infty]$ następujące zdania są równoważne:*

(i) Funkcja f spełnia równanie funkcyjne (2.5) dla $x, y \in [0, r_1]$.

(ii) Zachodzi $f = \infty$ lub $f = 0$, lub

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \infty, & x > 0, \end{cases} \tag{2.10}$$

dla $x \in [0, r_1]$.

Twierdzenie 2.8 (Baczyński et al. [19, Proposition 2]). *Dla funkcji $f\colon [0, \infty] \to [0, \infty]$ następujące zdania są równoważne:*

(i) Funkcja f spełnia równanie funkcyjne (2.6) dla $x, y \in [0, \infty]$.

(ii) Zachodzi $f = \infty$ lub $f = 0$, lub f przyjmuje postać (2.10), lub

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < \infty, \\ \infty, & x = \infty, \end{cases} \tag{2.11}$$

lub istnieje taka jednoznacznie wyznaczona stała $k \in (0, \infty)$, że

$$f(x) = kx, \tag{2.12}$$

dla $x \in [0, \infty]$.

Rozwiązanie równań funkcyjnych (2.3) - (2.6) pozwoliło scharakteryzować rozwiązania wszystkich czterech równań rozdzielności (D1) - (D4) wewnątrz rodzin ciągłych i archimedesowych t-norm i t-konorm ([7, 19]). Mianowicie znając rozwiązania pierwszego z nich, równania (2.3), możemy opisać rozwiązania wszystkich czterech równań (D1) - (D4) dla obu operatorów (t-norm lub t-konorm) nilpotentnych; znając rozwiązania drugiego z nich, równania (2.4), możemy opisać rozwiązania wszystkich czterech równań (D1) - (D4) dla operatora ścisłego po lewej stronie równań oraz operatora nilpotentnego po prawej stronie. Podobnie, znając rozwiązania równań (2.5), (2.6), możemy scharakteryzować rozwiązania równań rozdzielności odpowiednio dla operatora nilpotentnego po lewej stronie a ścisłego po prawej stronie równań lub dla obu operatorów ścisłych.

Dla zilustrowania tych stwierdzeń przeanalizujemy tutaj dokładniej jeden przypadek: wykorzystania rozwiązań równania (2.3) do rozwiązania równania rozdzielności (D2) dla dwóch t-konorm nilpotentnych. Wszystkie pozostałe przypadki są podobne.

Twierdzenie 2.9 (por. Baczyński et al. [19, Theorem 13]). *Niech S_1, S_2 będą t-konormami nilpotentnymi z ciągłymi, addytywnymi generatorami $s_1, s_2\colon [0, 1] \to [0, \infty]$, odpowiednio. Dla funkcji $I\colon [0, 1]^2 \to [0, 1]$ następujące zdania są równoważne:*

(i) Trójka funkcji (S_1, S_2, I) spełnia równanie funkcyjne (D2)*, tj.*

$$I(x, S_1(y,z)) = S_2(I(x,y), I(x,z)),$$

dla wszystkich $x, y, z \in [0,1]$.

(ii) Dla dowolnego ustalonego $x \in [0,1]$ przekrój pionowy $I(x,\cdot)$ posiada jedną z następujących form:

$$I(x,\cdot) = 0, \tag{2.13}$$

$$I(x,\cdot) = 1, \tag{2.14}$$

$$I(x,y) = \begin{cases} 0, & y = 0, \\ 1, & y \in (0,1], \end{cases} \tag{2.15}$$

$$I(x,y) = s_2^{-1}\left(\min(c_x \cdot s_1(y), s_2(1))\right), \qquad y \in [0,1], \tag{2.16}$$

dla pewnego $c_x \in [s_2(1)/s_1(1), \infty)$.

Dowód. „*(ii)* $\Longrightarrow$ *(i)*”
Dowód w tę stronę polega na przeliczeniu kolejno czterech przypadków, gdy dla ustalonego $x \in [0,1]$ przekrój pionowy $I(x,\cdot)$ przyjmuje jedną z postaci (2.13) - (2.16). Jeśli $I(x,\cdot) = 0$, to oczywiście $LHS(\mathrm{D2}) = 0 = S_2(0,0) = RHS(\mathrm{D2})$. Podobnie łatwo zweryfikować prawdziwość równania (D2), gdy $I(x,\cdot)$ przyjmuje postać (2.14) lub (2.15). Przeliczymy tu natomiast jeszcze przypadek ostatni. Niech $I(x,y) = s_2^{-1}(\min(c_x \cdot s_1(y), s_2(1)))$ dla $y \in [0,1]$ i pewnego $c_x \in [s_2(1)/s_1(1), \infty)$. Wówczas

$$\begin{aligned}
LHS(\mathrm{D2}) &= I(x, S_1(y,z)) = s_2^{-1}(\min(c_x \cdot s_1(S_1(y,z)), s_2(1))) \\
&= s_2^{-1}(\min(c_x \cdot \min(s_1(y) + s_1(z), s_1(1)), s_2(1))) \\
&= s_2^{-1}(\min(c_x(s_1(y) + s_1(z)), c_x s_1(1), s_2(1))) = s_2^{-1}(\min(c_x(s_1(y) + s_1(z)), s_2(1))), \\
RHS(\mathrm{D2}) &= S_2(I(x,y), I(x,z)) = S_2(s_2^{-1}(\min(c_x \cdot s_1(y), s_2(1))), s_2^{-1}(\min(c_x \cdot s_1(z), s_2(1)))) \\
&= s_2^{-1}(\min(\min(c_x \cdot s_1(y), s_2(1)) + \min(c_x \cdot s_1(z), s_2(1)), s_2(1))) \\
&= s_2^{-1}(\min(c_x(s_1(y) + s_1(z)), s_2(1))) = LHS(\mathrm{D2}).
\end{aligned}$$

„*(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)*”
Na początku tego podrozdziału przekształciliśmy równanie rozdzielności (D2) dla dwóch ciągłych i archimedesowych t-konorm S_1, S_2 o ciągłych, addytywnych generatorach s_1 oraz s_2, odpowiednio, do równania funkcyjnego

$$g_x(\min(u+v, s_1(1))) = \min(g_x(u) + g_x(v), s_2(1)), \qquad u, v \in [0, s_1(1)],$$

gdzie $g_x(\,\cdot\,) = s_2 \circ I(x, s_1^{-1}(\,\cdot\,))$ dla ustalonego $x \in [0,1]$. Ponieważ obie t-konormy S_1, S_2 są nilpotentne, to $s_1(1), s_2(1) < \infty$ i funkcja g_x spełnia równanie (2.3) dla skończonych stałych $r_1 := s_1(1)$ oraz $r_2 := s_2(1)$. Na mocy twierdzenia 2.5 zachodzi zatem $g_x = s_2(1)$ lub $g_x = 0$, lub

$$g_x(u) = \begin{cases} 0, & u = 0, \\ s_2(1), & u > 0, \end{cases} \qquad u \in [0, s_1(1)],$$

lub istnieje taka stała $c_x \in [s_2(1)/s_1(1), \infty)$, że

$$g_x(u) = \min(c_x u, s_2(1)), \qquad u \in [0, s_1(1)].$$

Mając w pamięci definicję funkcji g_x, otrzymujemy, że $I(x, \cdot)$ przyjmuje postać (2.13), (2.14), (2.15) lub (2.16). □

Twierdzenie 2.9 pozwala na opisanie nieskończenie wielu rozwiązań równania (D2), które są implikacjami rozmytymi. Warto zauważyć, iż przekrój pionowy implikacji rozmytej I dla $x = 0$ zawsze jest postaci (2.14), tj. $I(0, \cdot) = 1$. Pokażemy tutaj dwa przykłady implikacji rozmytych rozwiązujących (D2) dla t-konorm nilpotentnych.

Przykład 2.10 (Baczyński et al. [19, Example 5])**.** Jeśli S_1, S_2 są t-konormami nilpotentnymi, to największym rozwiązaniem (D2), które jest implikacją rozmytą, jest największa implikacja rozmyta:

$$I_1(x, y) = \begin{cases} 1, & x < 1 \ \text{ lub } \ y > 0, \\ 0, & x = 1 \ \text{ oraz } \ y = 0, \end{cases} \qquad x, y \in [0, 1].$$

Przekroje pionowe rozwiązania są w tym przypadku następujące: dla $x \in [0, 1)$ jest to $I(x, \cdot) = 1$, a dla $x = 1$ jest to rozwiązanie (2.34).

Przykład 2.11 (Baczyński et al. [19, Example 6])**.** Jeśli S_1, S_2 są t-konormami nilpotentnymi, to najmniejszym rozwiązaniem (D2), które jest implikacją rozmytą, jest następująca funkcja:

$$I(x, y) = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ s_2^{-1}\left(\min\left(\frac{s_2(1)}{s_1(1)} \cdot s_1(y), s_2(1)\right)\right), & x < 1, \end{cases} \qquad x, y \in [0, 1].$$

W szczególnym przypadku, kiedy $s_1 = s_2$, czyli $S_1 = S_2$, otrzymujemy następującą implikację rozmytą:

$$I(x, y) = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ y, & x < 1, \end{cases} \qquad x, y \in [0, 1],$$

która jest najmniejszą (S, N)-implikacją (zob. [17, Example 1.5]).

Autorka wraz z M. Baczyńskim oraz T. Szostokiem postawili sobie pytanie o rozwiązania ogólniejszych wersji równań funkcyjnych (2.3) - (2.6), w których w miejsce funkcji minimum oraz identyczności rozważane są bardziej ogólne funkcje m_1 oraz m_2. Problemowi temu poświęcony jest cały rozdział 3.

2.2.2 Równania rozdzielności dla ciągłych t-norm oraz t-konorm

M. Baczyński i B. Jayaram rozwiązując w 2009 roku równania rozdzielności (D1) - (D4) w przypadku t-norm oraz t-konorm ciągłych i archimedesowych, zaznaczyli w [19], że problem ten dla operatorów ciągłych pozostawał nierozwiązany. Jednak ich charakteryzacja przedstawiona w twierdzeniu 1.30 pozwala spojrzeć na operatory ciągłe jako na pewnego rodzaju kombinacje operatorów ciągłych i archimedesowych. Okazuje się zatem, że rozwiązanie równań rozdzielności w ogólniejszym przypadku t-norm i t-konorm ciągłych polega przede wszystkim na sprawnym wykorzystaniu wcześniejszych wyników, nie prowadząc przy tym do nowych równań funkcyjnych.

W latach 2012-2013 F. Qin, M. Baczyński oraz A. Xie [64, 16] rozwiązali równanie (D1) przy założeniu, że jedna z t-norm, T_1, jest ciągła, ale nie archimedesowa, natomiast druga z t-norm, T_2, jest ciągła i archimedesowa. Autorzy zauważyli, że ich metodę można zastosować do rozwiązania pozostałych trzech równań rozdzielności (D2) - (D4) w przypadku, gdy jedna z t-norm lub t-konorm jest ciągła i archimedesowa, a druga jest tylko ciągła. W kilku oddzielnych twierdzeniach scharakteryzowali oni rozwiązania równania (D1) dla t-normy ścisłej lub nilpotentnej generującej T_1 na pewnym szczególnym podprzedziale oraz dla t-normy T_2 także ścisłej lub nilpotentnej. Udowodnili, że wśród ciągłych rozwiązań nie ma implikacji rozmytych oraz opisali rozwiązania ciągłe poza punktem $(0,0)$, które są implikacjami rozmytymi. Autorzy podkreślili, że zbióry rozwiązań równania (D1) w zbadanym wcześniej przypadku, gdy obie t-normy są ciągłe i archimedesowe oraz w przypadku, gdy T_1 jest tylko ciągła, są istotnie różne.

W 2013 roku F. Qin oraz M. Baczyński kontynuowali swoje badania, tym razem w przypadku, gdy żaden z operatorów nie był archimedesowy. W pracy [63] rozwiązali oni równanie (D2), podkreślając, że ich metoda może być zastosowana także do rozwiązania pozostałych trzech równań rozdzielności. Zaprezentujemy tutaj najważniejsze twierdzenie z ich pracy, charakteryzujące wszystkie rozwiązania równania (D2), gdy obie t-konormy S_1, S_2 są ciągłe, ale nie są archimedesowe.

Twierdzenie 2.12 (por. Qin at al. [63, Theorem 4.17])**.** *Niech S_1, S_2 będą t-konormami ciągłymi, ale nie archimedesowymi, oraz niech $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ będzie dowolną funkcją. Ustalmy $x \in [0,1]$.*
Trójka funkcji (S_1, S_2, I) spełnia równanie (D2) dla wszystkich $y, z \in [0,1]$ oraz dla ustalonego przed chwilą $x \in [0,1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $I(x,\cdot)$ jest rosnąca, idempotentna, tj. $I(x, I(x,y)) = I(x,y)$ dla wszystkich $y \in [0,1]$, oraz na każdym podprzedziale (α_m, β_m) generującym S_1 zachodzi, co następuje:

(i) Jeśli t-konorma S_m generująca S_1 na podprzedziale (α_m, β_m) jest ścisła, to funkcja $I(x,\cdot)$ przyjmuje na tym podprzedziale jedną z dwóch postaci:

(a) $I(x,\cdot) = r$, gdzie r jest elementem idempotentnym, tj. $I(x, I(x,r)) = I(x,r)$, oraz zachodzi $I(x,\alpha_m) \leqslant r \leqslant I(x,\beta_m)$,

(b) lub

$$I(x,y) = \gamma_j + (\delta_j - \gamma_j) s_j^{-1}\left(\min\left(c_x s_m\left(\frac{y-\alpha_m}{\beta_m-\alpha_m}\right), s_j(1)\right)\right), \quad y \in (\alpha_m, \beta_m), \tag{2.17}$$

gdzie (γ_j, δ_j) jest takim podprzedziałem generującym S_2, że istnieje $y_0 \in (\alpha_m, \beta_m)$, takie że $I(x, y_0) \in (\gamma_j, \delta_j)$, S_j jest t-konormą generującą S_2 na tym podprzedziale oraz funkcje s_m, s_j są ciągłymi, addytywnymi generatorami t-konorm S_m oraz S_j, odpowiednio; wreszcie $c_x \in (0,\infty)$ jest pewną stałą określoną jednoznacznie z dokładnością do dodatniej stałej multyplikatywnej, zależną od stałych dla funkcji s_m oraz s_j.

(ii) Jeśli t-konorma S_m generująca S_1 na podprzedziale (α_m, β_m) jest nilpotentna, to funkcja $I(x,\cdot)$ przyjmuje na tym podprzedziale jedną z dwóch postaci:

(a) $I(x,\cdot) = I(x,\beta_m)$,

(b) $I(x,\cdot)$ jest postaci (2.17), dla pewnej stałej $c_x \in [\frac{s_j(1)}{s_m(1)}, \infty)$, określonej jednoznacznie z dokładnością do dodatniej stałej multyplikatywnej.

W tym samym czasie nad problemem rozdzielności implikacji względem ciągłych t-norm i t-konorm zajmowała się także grupa chińskich badaczy, A. Xie, H. Liu, F. Zhang oraz C. Li. W pracach [76, 77] nałożyli oni założenie na funkcję I, że jest rosnąca ze względu na drugą zmienną oraz skoncentrowali się na scharakteryzowaniu tylko tych rozwiązań, które są implikacjami rozmytymi.

2.2.3 Równania rozdzielności dla uninorm reprezentowalnych

Zauważmy najpierw, że jeśli w równaniach rozdzielności (D1) - (D4) w miejsce t-norm oraz t-konorm wstawimy ogólniejsze uninormy, to te cztery równania zredukują się do następujących dwóch:

$$I(x, U_1(y, z)) = U_2(I(x, y), I(x, z)), \tag{DU-1}$$

$$I(U_1(x, y), z) = U_2(I(x, z), I(y, z)), \tag{DU-2}$$

gdzie $x, y, z \in [0, 1]$ oraz $I, U_1, U_2 \colon [0, 1]^2 \to [0, 1]$.

Następnie za [8, 65] zaprezentujemy dwa wstępne fakty.

Lemat 2.13 (zob. Baczyński [8, Lemma 3.1])**.** *Niech funkcja $I \colon [0, 1]^2 \to [0, 1]$ spełnia warunek* (I3) *oraz równanie* (DU-1) *z pewnymi uninormami U_1, U_2. Wówczas U_1 jest koniunkcyjna wtedy i tylko wtedy, gdy U_2 jest koniunkcyjna.*

Lemat 2.14 (zob. Baczyński [8, Lemma 3.2])**.** *Niech funkcja $I \colon [0, 1]^2 \to [0, 1]$ spełnia warunek* (I3) *oraz równanie* (DU-2) *z pewnymi uninormami U_1, U_2. Wówczas U_1 jest koniunkcyjna wtedy i tylko wtedy, gdy U_2 jest alternatywna.*

Ponieważ każda klasyczna uninorma jest koniunkcyjna lub alternatywna (por. z uwagą 1.32), to na mocy powyższych lematów równanie funkcyjne (DU-1) wystarczy rozważyć tylko dla przypadku, kiedy obie uninormy U_1, U_2 są koniunkcyjne lub obie są alternatywne, oraz równanie funkcyjne (DU-2) tylko, gdy U_1 jest koniunkcyjna a U_2 alternatywna, lub U_1 jest alternatywna, a U_2 koniunkcyjna.

Oba równania (DU-1) oraz (DU-2) badano dotąd jedynie dla pewnej rodziny uninorm reprezentowalnych (porównaj [8]). Odgrywają one szczególną rolę wśród wszystkich uninorm, podobnie jak t-normy oraz t-konormy ciągłe i archimedesowe wśród wszystkich t-norm oraz t-konorm. W twierdzeniu 1.33 oraz uwadze 1.36 przedstawiliśmy ich prostą reprezentację za pomocą ciągłych, addytywnych generatorów. Mianowicie jeśli U jest uninormą reprezentowalną, której generatorem jest funkcja h, to U jest postaci (1.4), tj.

$$U(x, y) = h^{-1}(h(x) + h(y)), \qquad x, y \in [0, 1],$$

o ile U jest koniunkcyjna oraz na przeciwdziedzinie h przyjmiemy założenie $(A-)$, tj. $\infty + (-\infty) = (-\infty) + \infty = -\infty$, lub U jest alternatywna, a na przeciwdziedzinie h przyjmiemy założenie $(A+)$, tj. $\infty + (-\infty) = (-\infty) + \infty = \infty$.

Jeśli zatem rozważymy równania (DU-1), (DU-2) tylko dla uninorm reprezentowalnych, to korzystając z postaci (1.4) takich uninorm, możemy nasze równania rozdzielności uprościć. Mianowicie, niech $h_1, h_2 \colon [0, 1] \to [-\infty, \infty]$, gdzie $h_1(0) = h_2(0) = -\infty$, $h_1(e_1) = h_2(e_2) = 0$ oraz $h_1(1) = h_2(1) = \infty$, będą ciągłymi, addytywnymi generatorami uninorm U_1, U_2, a $e_1, e_2 \in (0, 1)$

elementami neutralnymi tych uninorm, odpowiednio. Jeśli U_1, U_2 są obie koniunkcyjne oraz kładziemy założenie $(A-)$ na przeciwdziedzinach h_1, h_2 lub U_1, U_2 obie są alternatywne oraz na przeciwdziedzinach h_1, h_2 zakładamy $(A+)$, to równanie (DU-1) możemy zapisać w postaci

$$I(x, h_1^{-1}(h_1(y) + h_1(z))) = h_2^{-1}(h_2(I(x, y)) + h_2(I(x, z))), \qquad x, y, z \in [0, 1].$$

Podobnie, jeśli jedna z uninorm jest koniunkcyjna, a druga jest alternatywna, oraz mamy odpowiednią kombinację założeń $(A-)/(A+)$ na przeciwdziedzinach h_1, h_2, to równanie (DU-2) możemy zapisać w postaci

$$I(h_1^{-1}(h_1(x) + h_1(y)), z) = h_2^{-1}(h_2(I(x, z)) + h_2(I(y, z))), \qquad x, y, z \in [0, 1].$$

Następnie oznaczmy standardowo przez f_x oraz g^z, dla ustalonych $x, z \in [0, 1]$, następujące złożenia funkcji:

- $f_x(\,\cdot\,) := h_2 \circ I(x, h_1^{-1}(\,\cdot\,))$,
- $g^z(\,\cdot\,) := h_2 \circ I(h_1^{-1}(\,\cdot\,), z)$.

Powyższe dwa równania rozdzielności możemy teraz przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} f_x(h_1(y) + h_1(z)) &= f_x(h_1(y)) + f_x(h_1(z)), \qquad && y, z \in [0, 1], \\ g^z(h_1(x) + h_1(y)) &= g^z(h_1(x)) + g^z(h_1(y)), \qquad && x, y \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Są to zatem rozszerzone do nieskończoności klasyczne równania Cauchy'ego

$$f(u + v) = f(u) + f(v), \tag{C}$$

gdzie $f\colon [-\infty, \infty] \to [-\infty, \infty]$ jest nieznaną funkcją. Dziedzina oraz przeciwdziedzina f to odpowiednio przeciwdziedziny funkcji h_1 oraz h_2. Z wyprowadzenia równania (C) z równań rozdzielności (DU-1), (DU-2) wynika, że poszukiwane są jego rozwiązania dla wszystkich kombinacji założeń $(A-)/(A+)$ na dziedzinie i przeciwdziedzinie funkcji f. Rozwiązania te zostały znalezione przez M. Baczyńskiego [8]. W niniejszej pracy zacytujemy uzyskane przez niego wyniki poza jednym przypadkiem, w którym w pracy [8] wkradł się błąd. Dla tego przypadku podamy poprawne sformułowanie twierdzenia wraz z pełnym dowodem, będzie to twierdzenie 2.18. Do przedstawionych tutaj wyników będziemy się odwoływać w dalszej części tego rozdziału oraz w rozdziałach 2.2.4 i 4.

Twierdzenie 2.15 (Baczyński [8, Proposition 4.1]). *Niech $X = Y = [-\infty, \infty]$. Dla funkcji $f\colon X \to Y$ następujące zdania są równoważne:*

(i) Funkcja f spełnia równanie funkcyjne Cauchy'ego (C) *dla $x, y \in X$, z założeniem $(A-)$, tj. $(-\infty) + \infty = \infty + (-\infty) = -\infty$, na obu zbiorach X oraz Y.*

(ii) Zachodzi $f = -\infty$ lub $f = 0$, lub $f = \infty$,

$$\text{lub} \quad f(x) = \begin{cases} -\infty, & x = -\infty, \\ 0, & x \in (-\infty, \infty], \end{cases} \tag{2.18}$$

$$\text{lub} \quad f(x) = \begin{cases} \infty, & x = -\infty, \\ 0, & x \in (-\infty, \infty], \end{cases} \tag{2.19}$$

$$\text{lub} \quad f(x) = \begin{cases} -\infty, & x = -\infty, \\ \infty, & x \in (-\infty, \infty], \end{cases} \tag{2.20}$$

$$\text{lub} \quad f(x) = \begin{cases} -\infty, & x \in \{-\infty, \infty\}, \\ \infty, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.21}$$

lub istnieje taka jednoznacznie wyznaczona addytywna funkcja $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, że*

$$f(x) = \begin{cases} -\infty, & x \in \{-\infty, \infty\}, \\ c(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.22}$$

$$\text{lub} \quad f(x) = \begin{cases} \infty, & x \in \{-\infty, \infty\}, \\ c(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.23}$$

$$\text{lub} \quad f(x) = \begin{cases} -\infty, & x = -\infty, \\ c(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \infty, & x = \infty. \end{cases} \tag{2.24}$$

Twierdzenie 2.16 (Baczyński [8, Proposition 4.3])**.** *Niech* $X = Y = [-\infty, \infty]$*. Dla funkcji* $f\colon X \to Y$ *następujące zdania są równoważne:*

(i) Funkcja f *spełnia równanie funkcyjne Cauchy'ego* (C) *dla* $x, y \in X$*, z założeniem* (*A*+)*, tj.* $(-\infty) + \infty = \infty + (-\infty) = \infty$*, na obu zbiorach* X *oraz* Y*.*

(ii) Zachodzi $f = -\infty$ *lub* $f = 0$*, lub* $f = \infty$*,*

$$\text{lub} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\infty, \infty), \\ -\infty, & x = \infty, \end{cases} \tag{2.25}$$

$$\text{lub} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\infty, \infty), \\ \infty, & x = \infty, \end{cases} \tag{2.26}$$

$$\text{lub} \quad f(x) = \begin{cases} -\infty, & x \in [-\infty, \infty), \\ \infty, & x = \infty, \end{cases} \tag{2.27}$$

$$\text{lub} \quad f(x) = \begin{cases} -\infty, & x \in \mathbb{R}, \\ \infty, & x \in \{-\infty, \infty\}, \end{cases} \tag{2.28}$$

lub istnieje taka jednoznacznie wyznaczona addytywna funkcja $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, że* f *jest postaci* (2.22), (2.23) *lub* (2.24)*.*

Twierdzenie 2.17 (Baczyński [8, Proposition 4.5])**.** *Niech* $X = Y = [-\infty, \infty]$*. Dla funkcji* $f\colon X \to Y$ *następujące zdania są równoważne:*

(i) Funkcja f *spełnia równanie funkcyjne Cauchy'ego* (C) *dla* $x, y \in X$*, z założeniem* (*A*−) *na zbiorze* X *oraz* (*A*+) *na zbiorze* Y*.*

(ii) Zachodzi $f = -\infty$ lub $f = 0$, lub $f = \infty$, lub f jest postaci (2.18), (2.19) *lub* (2.28), *lub*

$$f(x) = \begin{cases} \infty, & x = -\infty, \\ -\infty, & x \in (-\infty, \infty], \end{cases} \tag{2.29}$$

lub istnieje taka jednoznacznie wyznaczona addytywna funkcja $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że f jest postaci (2.22), (2.23) *lub*

$$f(x) = \begin{cases} \infty, & x = -\infty, \\ c(x), & x \in \mathbb{R}, \\ -\infty, & x = \infty. \end{cases} \tag{2.30}$$

Twierdzenie 2.18 (por. Baczyński [8, Proposition 4.7])**.** *Niech $X = Y = [-\infty, \infty]$. Dla funkcji $f\colon X \to Y$ następujące zdania są równoważne:*

(i) Funkcja f spełnia równanie funkcyjne Cauchy'ego (C) *dla $x, y \in X$, z założeniem $(A+)$ na zbiorze X oraz $(A-)$ na zbiorze Y.*

(ii) Zachodzi $f = -\infty$ lub $f = 0$, lub $f = \infty$, lub f jest postaci (2.21), (2.25) *lub* (2.26), *lub*

$$f(x) = \begin{cases} \infty, & x \in [-\infty, \infty), \\ -\infty, & x = \infty, \end{cases} \tag{2.31}$$

lub istnieje taka jednoznacznie wyznaczona addytywna funkcja $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że f jest postaci (2.22), (2.23) *lub* (2.30).

Dowód. „*(ii)* $\Longrightarrow$ *(i)*”
Dowód w tę stronę jest bezpośrednim przeliczeniem, że powyższe funkcje spełniają równanie funkcyjne Cauchy'ego (C) przy założeniu $(A+)$ na zbiorze X oraz $(A-)$ na zbiorze Y.

„*(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)*”
Niech $f\colon X \to Y$ spełnia równanie (C) dla wszystkich $x, y \in X$, przy założeniu $(A+)$ na zbiorze X oraz $(A-)$ na zbiorze Y. Najpierw zauważmy, że niemożliwa jest kombinacja wartości funkcji $f(-\infty) = -\infty$ oraz $f(\infty) = \infty$, jeśli bowiem byłaby ona prawdziwa, to otrzymalibyśmy

$$\infty = f(\infty) = f((-\infty) + \infty) = f(-\infty) + f(\infty) = (-\infty) + \infty = -\infty,$$

czyli sprzeczność.

Wstawiając $x = y = \infty$ do równania (C), otrzymujemy $f(\infty) = f(\infty) + f(\infty)$, zatem $f(\infty) \in \{-\infty, 0, \infty\}$. Jeśli $f(\infty) = 0$, to dla dowolnego $x \in [-\infty, \infty]$ mamy

$$0 = f(\infty) = f(\infty + x) = f(\infty) + f(x) = 0 + f(x) = f(x),$$

a stąd $f = 0$, czyli otrzymaliśmy pierwsze rozwiązanie.

Wstawiając następnie $x = y = -\infty$ do równania (C), otrzymujemy podobnie, że $f(-\infty) = f(-\infty) + f(-\infty)$, a zatem $f(-\infty) \in \{-\infty, 0, \infty\}$. Jeśli $f(-\infty) = 0$, to dla dowolnego $x \in [-\infty, \infty)$ mamy

$$0 = f(-\infty) = f(-\infty + x) = f(-\infty) + f(x) = 0 + f(x) = f(x).$$

Określając brakującą wartość $f(\infty)$ jako $-\infty$ lub ∞, otrzymujemy rozwiązania (2.25) i (2.26). Dalej należy rozważyć wszystkie przypadki, gdy $f(-\infty), f(\infty) \in \{-\infty, \infty\}$, wyłączając ten, gdy $f(-\infty) = -\infty$ oraz $f(\infty) = \infty$.

Kładąc $x = y = 0$ w (C), otrzymujemy $f(0) = f(0) + f(0)$, czyli także $f(0) \in \{-\infty, 0, \infty\}$. Jeśli $f(0) = -\infty$, to dla dowolnego $x \in [-\infty, \infty]$ mamy

$$f(x) = f(x + 0) = f(x) + f(0) = f(x) + (-\infty) = -\infty,$$

a zatem otrzymujemy kolejne rozwiązanie $f = -\infty$. Jeśli $f(0) = \infty$, wtedy dla dowolnego $x \in [-\infty, \infty]$ dostajemy

$$f(x) = f(x + 0) = f(x) + f(0) = f(x) + \infty,$$

więc dla dowolnego ustalonego $x \in [-\infty, \infty]$ zachodzi $f(x) = -\infty$ lub $f(x) = \infty$. Natomiast dla $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$\infty = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x),$$

co łącznie z założeniem $(A-)$ na zbiorze Y prowadzi do $f(x) = \infty$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Rozważając trzy możliwe kombinacje wartości $f(-\infty)$ oraz $f(\infty)$, otrzymujemy kolejne trzy rozwiązania: $f = \infty$, (2.21) oraz (2.31).

Rozważmy wreszcie ostatni przypadek, gdy $f(0) = 0$. Wówczas dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x),$$

stąd $f(x) \in \mathbb{R}$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Istnieje zatem wyznaczona jednoznacznie addytywna funkcja $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, taka że $f(x) = c(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Ponownie biorąc pod uwagę trzy możliwe kombinacje wartości $f(-\infty)$ i $f(\infty)$, otrzymujemy trzy ostatnie rozwiązania: (2.22), (2.23) oraz (2.30). $\square$

Wykorzystując twierdzenia 2.15 - 2.18, możemy scharakteryzować rozwiązania równań rozdzielności (DU-1) oraz (DU-2) dla wszystkich kombinacji koniunkcyjnych i alternatywnych uninorm reprezentowalnych U_1, U_2. Możemy to zrobić oczywiście przy odpowiednich założeniach $(A-)/(A+)$ na odpowiednich zbiorach, kiedy to postać uninorm reprezentowalnych się upraszcza (porównaj z uwagą 1.36) i umożliwia zredukowanie równań rozdzielności do równania Cauchy'ego (C). Rozwiązanie równań (DU-1) oraz (DU-2) przy innych kombinacjach założeń $(A-)/(A+)$ na przeciwdziedzinach generatorów obu uninorm pozostaje zatem problemem otwartym.

W niniejszej pracy jako przykład przedstawimy twierdzenie charakteryzujące rozwiązania równania (DU-1) dla dwóch koniunkcyjnych uninorm reprezentowalnych.

Twierdzenie 2.19 (por. Baczyński [8, Theorem 5.1]). *Niech U_1, U_2 będą koniunkcyjnymi uninormami reprezentowalnymi z funkcjami $h_1, h_2\colon [0,1] \to [-\infty, \infty]$ jako ich ciągłymi, addytywnymi generatorami oraz z elementami neutralnymi $e_1, e_2 \in (0,1)$, odpowiednio. Ponadto załóżmy $(A-)$ na przeciwdziedzinach h_1, h_2. Dla dowolnej funkcji $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ następujące zdania są równoważne:*

(i) Trójka funkcji (U_1, U_2, I) spełnia równanie funkcyjne (DU-1) *dla wszystkich $x, y, z \in [0,1]$.*

(ii) Dla dowolnego ustalonego $x \in [0,1]$ przekrój pionowy $I(x, \cdot)$ przyjmuje jedną z następujących postaci:

$$I(x, \cdot) = 0 \qquad \textit{lub} \qquad I(x, \cdot) = e_2, \qquad \textit{lub} \qquad I(x, \cdot) = 1,$$

$$\textit{lub} \quad I(x,y) = \begin{cases} 0, & y=0, \\ e_2, & y\in(0,1], \end{cases} \qquad (2.32) \qquad \textit{lub} \quad I(x,y) = \begin{cases} 1, & y=0, \\ e_2, & y\in(0,1], \end{cases} \qquad (2.33)$$

$$\textit{lub} \quad I(x,y) = \begin{cases} 0, & y=0, \\ 1, & y\in(0,1], \end{cases} \qquad (2.34) \qquad \textit{lub} \quad I(x,y) = \begin{cases} 0, & y\in\{0,1\}, \\ 1, & y\in(0,1), \end{cases} \qquad (2.35)$$

$$\textit{lub} \quad I(x,y) = \begin{cases} 0, & y\in\{0,1\}, \\ h_2^{-1}\left(g_x(h_1(y))\right), & y\in(0,1), \end{cases} \tag{2.36}$$

$$\textit{lub} \quad I(x,y) = \begin{cases} 1, & y\in\{0,1\}, \\ h_2^{-1}\left(g_x(h_1(y))\right), & y\in(0,1), \end{cases} \tag{2.37}$$

$$\textit{lub} \quad I(x,y) = \begin{cases} 0, & y=0, \\ h_2^{-1}\left(g_x(h_1(y))\right), & y\in(0,1), \\ 1, & y=1, \end{cases} \tag{2.38}$$

dla pewnej funkcji addytywnej $g_x\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Dowód. „$(ii) \implies (i)$”
Dowód w tę stronę jest bezpośrednim przeliczeniem, że powyższe funkcje wraz z U_1, U_2 spełniają równanie funkcyjne (DU-1). Pomijamy go w tej pracy.

„$(i) \implies (ii)$”
Na początku tego podrozdziału przekształciliśmy równanie rozdzielności (DU-1) dla dwóch koniunkcyjnych uninorm reprezentowalnych U_1, U_2, z generatorami h_1, h_2, odpowiednio, oraz przy założeniu $(A-)$ na przeciwdziedzinach tych generatorów, do równania funkcyjnego

$$f_x(u+v) = f_x(u) + f_x(v), \qquad u,v\in[-\infty,\infty],$$

gdzie $f_x(\cdot) = h_2 \circ I(x, h_1^{-1}(\cdot))$, $f_x\colon [-\infty,\infty]\to[-\infty,\infty]$ oraz na dziedzinie i przeciwdziedzinie funkcji f_x zakładamy $(A-)$. Twierdzenie 2.18 opisuje wszystkie rozwiązania f_x. Znając ich postać i korzystając z definicji funkcji f_x oraz z tego, że $h_1(0) = h_2(0) = -\infty$, $h_1(e_1) = h_2(e_2) = 0$ i $h_1(1) = h_2(1) = \infty$, wyprowadzamy już łatwo wzory na przekrój pionowy $I(x,\cdot)$, podane w tym twierdzeniu. □

Zauważmy, że aby przekrój pionowy rozwiązania równania (DU-1) określony w twierdzeniu 2.19 mógł być przekrojem pionowym implikacji rozmytej dla pewnego ustalonego $x\in[0,1]$, musi zachodzić $I(x,\cdot) = 1$ albo $I(x,\cdot)$ musi być postaci (2.34) lub (2.38). W szczególności dla $x = 0$ jedynie pierwsza z tych opcji jest możliwa. Ponadto musimy pamiętać, że implikacja rozmyta jest malejąca ze względu na pierwszą zmienną oraz rosnąca ze względu na drugą zmienną. Pomimo tych wszystkich dodatkowych warunków, wśród rozwiązań równania (DU-1) łatwo możemy znaleźć nieskończenie wiele implikacji rozmytych. W poniższym przykładzie podamy dwie z nich.

Przykład 2.20 (Baczyński [8, Example 5.2]). (i) Jeśli U_1 oraz U_2 są koniunkcyjnymi uninormami reprezentowalnymi, to największe rozwiązanie równania (DU-1), które jest implikacją rozmytą, jest największą implikacją rozmytą (zob. [18]):

$$I_1(x,y) = \begin{cases} 1, & x < 1 \text{ lub } y > 0, \\ 0, & x = 1 \text{ oraz } y = 0, \end{cases} \qquad x, y \in [0,1].$$

(ii) Jeśli U_1 oraz U_2 są koniunkcyjnymi uninormami reprezentowalnymi z elementami neutralnymi e_1, e_2, odpowiednio, to następująca implikacja rozmyta:

$$I(x,y) = \begin{cases} 1, & x = 0 \text{ lub } y = 1, \\ e_2, & x > 0 \text{ oraz } y \in (0,1), \\ 0, & \text{wpp}, \end{cases} \qquad x, y \in [0,1],$$

spełnia równanie (DU-1) wraz z U_1 i U_2. Przekroje pionowe są w tym przypadku następujące: dla $x = 0$ mamy $I(0, \cdot) = 1$, a dla $x \in (0,1]$ przekroje pionowe są postaci (2.38) z funkcją $g_x = 0$.

2.2.4 Równania rozdzielności dla t-norm oraz t-konorm rozkładalnych

W tym podrozdziale zarysujemy problem badania rozdzielności operatorów rozmytych określonych na kracie $\mathcal{L}^I$, którą rozważa się w przedziałowej logice rozmytej. Przypomnijmy, że zgodnie z definicją z przykładu 1.9 przyjmujemy $\mathcal{L}^I = (L^I, \leqslant_{L^I})$, gdzie

$$\begin{aligned} L^I &= \{(x_1, x_2) \in [0,1]^2 \mid x_1 \leqslant x_2\}, \\ (x_1, x_2) \leqslant_{L^I} (y_1, y_2) &\iff x_1 \leqslant y_1 \wedge x_2 \leqslant y_2. \end{aligned}$$

Dotychczas zbadano szczegółowo równanie rozdzielności (D1), tj.

$$\mathcal{I}(x, \mathcal{T}_1(y,z)) = \mathcal{T}_2(\mathcal{I}(x,y), \mathcal{I}(x,z)), \qquad x, y, z \in L^I,$$

dla rozkładalnych t-norm na $\mathcal{L}^I$ generowanych przez ciągłe i archimedesowe t-normy na $([0,1], \leqslant)$. Zagadnieniem tym zajmuje się od 2010 roku w szczególności M. Baczyński. W pracach [9, 11, 10, 12, 13, 14] wskazał on, że aby uzyskać rozwiązania równania (D1) w tej rodzinie operatorów, konieczne jest m.in. rozwiązanie równania funkcyjnego

$$f(\min(u_1 + v_1, r_1), \min(u_2 + v_2, r_1)) = \min(f(u_1, u_2) + f(v_1, v_2), r_2), \tag{2.39}$$

gdzie $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in [0, r_1]^2$, takie że $u_1 \geqslant u_2$, $v_1 \geqslant v_2$ oraz r_1, r_2 są dowolnymi dodatnimi stałymi, skończonymi lub nieskończonymi. W rzeczywistości trzeba zatem było rozwiązać następujące cztery równania funkcyjne:

$$g(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = g(u_1, u_2) + g(v_1, v_2), \tag{f1}$$

$$h(\min(u_1 + v_1, a), \min(u_2 + v_2, a)) = h(u_1, u_2) + h(v_1, v_2), \tag{f2}$$

$$j(\min(u_1 + v_1, a), \min(u_2 + v_2, a)) = \min(j(u_1, u_2) + j(v_1, v_2), b), \tag{f3}$$

$$k(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = \min(k(u_1, u_2) + k(v_1, v_2), b), \tag{f4}$$

gdzie $a, b > 0$ są ustalonymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi, $g\colon L^{\infty} \to [0,\infty]$, $h\colon L^{a} \to [0,\infty]$, $j\colon L^{a} \to [0,b]$, $k\colon L^{\infty} \to [0,b]$ są nieznanymi funkcjami oraz

$$\begin{aligned} L^{\infty} &:= \{(u_1,u_2) \in [0,\infty]^2 \mid u_1 \geqslant u_2\}, \\ L^{a} &:= \{(u_1,u_2) \in [0,a]^2 \mid u_1 \geqslant u_2\}. \end{aligned}$$

Rozwiązania równania (f1) są zaprezentowane w [9, Proposition 3.2], rozwiązania równania (f2) w [11, Proposition 4.2], rozwiązania równania (f3) w [15, Proposition 5.2] oraz rozwiązania równania (f4) w [12, Proposition 3.2].

Aby scharakteryzować rozwiązania pozostałych równań rozdzielności dla implikacji rozmytych, t-norm i t-konorm na $\mathcal{L}^I$, potrzebne będzie rozwiązanie równań (f1) - (f4) dla funkcji określonych na kombinacjach zbiorów L^{∞}, L^{a} oraz L_{∞}, L_{a}, gdzie

$$\begin{aligned} L_{\infty} &= \{(u_1,u_2) \in [0,\infty]^2 \mid u_1 \leqslant u_2\}, \\ L_{a} &= \{(u_1,u_2) \in [0,a]^2 \mid u_1 \leqslant u_2\}. \end{aligned}$$

Zbiory L^{∞}, L^{a} odpowiadają tym stronom równań, w których występują t-normy, a zbiory L_{∞}, L_{a} tym stronom równań, w których występują t-konormy. Wynika to z tego, że funkcje generujące ciągłe i archimedesowe t-konormy są ściśle rosnące, zatem nie odwracają porządku między argumentami ze zbioru L^I, natomiast generatory ciągłych i archimedesowych t-norm są ściśle malejące, a więc ten porządek właśnie odwracają. Jak dotąd wyniki dotyczące tak zmodyfikowanych równań (f1) - (f4) nie zostały opublikowane.

Autorka we współpracy z M. Baczyńskim podjęła się kontynuacji badań nad rozdzielnością implikacji w rodzinie operatorów rozmytych na $\mathcal{L}^I$, w miejsce t-norm i t-konorm rozważając ogólniejsze uninormy na $\mathcal{L}^I$. Badania te doprowadziły m.in. do równania funkcyjnego (F), tj.

$$f(u_1+v_1, u_2+v_2) = f(u_1,u_2) + f(v_1,v_2), \qquad (u_1,u_2),(v_1,v_2) \in L^{\overline{\infty}},$$

gdzie $L^{\overline{\infty}} = \{(x_1,x_2) \in [-\infty,\infty]^2 \mid x_1 \leqslant x_2\}$. Rozdział 4 jest poświęcony temu zagadnieniu.

Rozdział 3

O równaniu $f(m_1(x+y)) = m_2(f(x)+f(y))$

W podrozdziale 2.2.1 wyprowadziliśmy równanie (2.2) dane wzorem

$$f(\min(x+y, r_1)) = \min(f(x)+f(y), r_2),$$

gdzie stałe $r_1, r_2 \in (0, \infty]$ mogą być skończone lub nieskończone, a $f\colon [0, r_1] \to [0, r_2]$. Zaprezentowaliśmy tam również uzyskane w [7, 19] rozwiązania równań (2.3)-(2.6), które są czterema wersjami równania (2.2) dla wszystkich kombinacji r_1, r_2 skończonych i nieskończonych. Rozwiązania te są potrzebne, aby scharakteryzować implikacje rozmyte spełniające równania rozdzielności (D1)-(D4) wraz z ciągłymi i archimedesowymi t-normami oraz t-konormami. Zilustrowaliśmy to w twierdzeniu 2.9 oraz w przykładach 2.10, 2.11, analizując rozwiązania równania (D2) dla t-konorm nilpotentnych.

W niniejszym rozdziale rozważymy ogólniejsze równanie, wstawiając w miejsce minimów bardziej ogólne funkcje m_1, m_2. Mianowicie interesować nas będzie równanie

$$f(m_1(x+y)) = m_2(f(x)+f(y)), \tag{M}$$

gdzie $m_1\colon [0, 2r_1] \to [0, r_1]$, $m_2\colon [0, 2r_2] \to [0, r_2]$ dla pewnych stałych $r_1, r_2 \in (0, \infty]$, które mogą być skończone lub nieskończone. Nałożymy pewne dodatkowe założenia na funkcje m_1 i m_2. Najpierw rozważymy i w pełni rozwiążemy przypadek, gdy funkcja m_2 jest różnowartościowa. Przy okazji tych rozważań pojawi się klasyczne równanie Jensena, ale rozszerzone do nieskończoności. Rozwiążemy je oraz przedstawimy jego związek z rozwiązanym w 2009 równaniem Cauchy'ego, także rozszerzonym do nieskończoności [19]. Następnie zbadamy rozwiązania równania (M), gdy funkcja m_2 nie jest różnowartościowa. W tym przypadku nałożymy inne, dodatkowe założenia na funkcje m_1, m_2, zapewniające im pewne podobieństwo do funkcji minimum lub identyczności. W szczególnościci udowodnimy, że wszystkie rozwiązania równań (2.3)-(2.6) można wywnioskować z uzyskanych przez nas twierdzeń, co oznacza, że nasze wyniki rzeczywiście uogólniają wcześniejsze rezultaty (porównaj [7, 19]). Wskażemy również przykłady zupełnie nowych rozwiązań równania (M), które nie należą do zbioru rozwiązań równań (2.3)-(2.6).

Wszystkie wyniki przedstawione w niniejszym rozdziale zostały uzyskane w latach 2012-2015 przez Autorkę we współpracy z M. Baczyńskim oraz T. Szostokiem. Duża część z nich została opublikowana w kilku pracach – przypadek różnowartościowej funkcji m_2 opisano w pracach [23, 24, 21], natomiast przypadek nieróżnowartościowej funkcji m_2 w artykułach [23, 24, 22].

3.1 Przypadek różnowartościowej funkcji m_2

W całym podrozdziale badając równanie, nakładamy tylko jedno dodatkowe założenie na funkcje m_1 oraz m_2: że funkcja m_2 jest różnowartościowa. Zwróćmy uwagę, że spośród równań (2.3)-(2.6) w pierwszych dwóch m_2 zastępuje funkcję minimum (dokładniej $\min(\cdot, r)$ dla ustalonego $r \in (0, \infty)$), natomiast w pozostałych dwóch m_2 zastępuje identyczność. Oczywiście identyczność jest różnowartościowa, w przeciwieństwie do minimum, dlatego tylko równania (2.5), (2.6) będą przez nas tutaj rzeczywiście uogólnione. Odpowiadają im przypadki, kiedy $r_2 = \infty$.

Rozpoczniemy od krótkiego lematu sprowadzającego ten przypadek do klasycznego równania Jensena, rozszerzonego do nieskończoności. Poniższy lemat udowodniliśmy w pracy [24], przy założeniu, że stałe r_1, r_2 są skończone. Tutaj opuszczamy to założenie.

Lemat 3.1. *Niech $r_1, r_2 \in (0, \infty]$ oraz niech $m_1\colon [0, 2r_1] \to [0, r_1]$, $m_2\colon [0, 2r_2] \to [0, r_2]$ będą danymi funkcjami. Jeżeli funkcja m_2 jest różnowartościowa oraz funkcja $f\colon [0, r_1] \to [0, r_2]$ wraz z m_1, m_2 spełnia równanie* (M)*, to f spełnia także równanie Jensena*

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right), \tag{J}$$

dla $x, y \in [0, r_1]$.

Dowód. Z (M) otrzymujemy

$$m_2^{-1}\left(f(m_1(x+y))\right) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in [0, r_1],$$

i wstawiając $F(t) := m_2^{-1}(f(m_1(t)))$, dla $t \in [0, 2r_1]$, dostajemy

$$F(x+y) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in [0, r_1].$$

Dla $x, y \in [0, r_1]$ zapisujemy więc ciąg równości

$$f(x) + f(y) = F(x+y) = F\left(\left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x+y}{2}\right)\right) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

a zatem f spełnia równanie Jensena (J). □

3.1.1 Równanie Jensena rozszerzone do nieskończoności

Z lematu 3.1 wnioskujemy, że do rozwiązania równania (M) należy rozwiązać równanie Jensena (J) dla funkcji $f\colon [0, r_1] \to [0, r_2]$, gdzie $r_1, r_2 \in (0, \infty]$. W tym podrozdziale rozważymy zatem cztery przypadki odpowiadające wszystkim kombinacjom skończonych oraz nieskończonych wartości stałych r_1 i r_2. Ponadto zaprezentujemy rozwiązania równania Jensena (J) dla funkcji $f\colon [-\infty, \infty] \to [-\infty, \infty]$ oraz przedyskutujemy ich związek z rozwiązaniami równania Cauchy'ego (C), które przedstawiliśmy w twierdzeniach (2.15) - (2.18) w podrozdziale 2.2.3.

W niniejszej pracy **jensenowskimi** nazywać będziemy rzeczywiste funkcje spełniające równanie Jensena (J). Rozpoczniemy od podstawowego lematu, z którego wynika bezpośrednio następujący po nim wniosek 3.3; będzie on nam służył za narzędzie w dowodach kolejnych twierdzeń 3.4, 3.5, 3.7. Ponieważ dowody implikacji „$\Longleftarrow$” w tych trzech twierdzeniach są prostym przeliczeniem, pominiemy je w tej pracy, koncentrując się na dowodach implikacji w drugą stronę.

Lemat 3.2. *Niech $D \subset \mathbb{R}^N$ będzie zbiorem wypukłym takim, że $intD \neq \emptyset$, i niech funkcja $f\colon D \to \mathbb{R}$ będzie rozwiązaniem równania Jensena* (J)*. Jeżeli f jest ograniczona z dołu lub jest ograniczona z góry na zbiorze D, to*

$$f(x) = cx + a, \qquad\qquad x \in D, \tag{3.1}$$

dla pewnych stałych $c \in \mathbb{R}^N$, $a \in \mathbb{R}$.

Dowód. Ten lemat jest krótkim wnioskiem z rezultatów zawartych w [53]. Najpierw, ponieważ f jest rozwiązaniem równania (J) i jest funkcją ograniczoną (z dołu lub z góry), to f jest ciągła (zob. [53, Theorem XIII.2.3]). Następnie, wobec [53, Theorem XIII.2.2] otrzymujemy, że f przyjmuje postać (3.1). □

Wniosek 3.3. *Niech $f\colon [0, r_1] \to [0, r_2]$, dla pewnych skończonych $r_1, r_2 \in (0, \infty)$. Wówczas f spełnia równanie Jensena* (J) *dla $x, y \in [0, r_1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie $c, d \in \mathbb{R}$, że $f(x) = cx + d$ oraz $cx + d \in [0, r_2]$ dla wszystkich $x \in [0, r_1]$.*

Twierdzenie 3.4. *Niech $f\colon [0, \infty] \to [0, r_2]$, dla pewnego skończonego $r_2 \in (0, \infty)$. Wówczas f spełnia równanie Jensena* (J) *dla $x, y \in [0, \infty]$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest stała, tj. istnieje takie $d \in [0, r_2]$, że $f = d$.*

Dowód. „$(i) \Longrightarrow (ii)$"
Niech $g := f\big|_{\mathbb{R}}$, czyli $g\colon [0, \infty) \to [0, r_2]$ i oczywiście funkcja g również spełnia równanie Jensena (J), dla $x \in [0, \infty)$, ponadto jest ograniczona, a zatem z lematu 3.2 istnieją (nieujemne) $c, d \in \mathbb{R}$, takie że

$$g(x) = cx + d, \qquad\qquad x \in [0, \infty).$$

Mamy więc także $f(x) = cx + d$, dla $x \in [0, \infty)$. Wstawmy teraz $x = \infty$ oraz dowolne $y \in [0, \infty)$ do (J) dla funkcji f:

$$f(\infty) + f(y) = 2f\left(\frac{\infty + y}{2}\right) \Longleftrightarrow f(\infty) + cy + d = 2f(\infty) \Longleftrightarrow cy + d = f(\infty),$$

a zatem $c = 0$ oraz $f(\infty) = d$. Ostatnie równoważność jest prawdziwa, ponieważ $f(\infty) < \infty$. Otrzymaliśmy w ten sposób, że jedynym rozwiązaniem jest $f = d$, dla pewnego $d \in [0, r_2]$. □

Twierdzenie 3.5. *Niech $f\colon [0, r_1] \to [0, \infty]$, dla pewnego skończonego $r_1 \in (0, \infty)$. Wówczas następujące zdania są równoważne:*

(i) Funkcja f spełnia równanie Jensena (J) *dla $x, y \in [0, r_1]$.*

(ii) Zachodzi $f = \infty$ lub istnieje $d \in [0, \infty)$, takie że

$$f(x) = \begin{cases} d, & x = 0, \\ \infty, & x > 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

lub

$$f(x) = \begin{cases} \infty, & x < r_1, \\ d, & x = r_1, \end{cases} \tag{3.3}$$

lub istnieją $c, d \in [0, \infty)$, takie że

$$f(x) = cx + d, \tag{3.4}$$

dla wszystkich $x \in [0, r_1]$.

Dowód. „(*i*) $\Longrightarrow$ (*ii*)”
Najpierw załóżmy, że funkcja f przyjmuje jedynie wartości rzeczywiste, tj. $f\colon [0,r_1] \to [0,\infty)$. Wówczas z lematu 3.2 otrzymujemy, że istnieją nieujemne $c, d \in \mathbb{R}$, takie że

$$f(x) = cx + d, \qquad\qquad x \in [0, r_1].$$

Uzyskujemy w ten sposób rozwiązanie (3.4).

Dalej rozważamy drugą możliwość, tj. że istnieje takie $x_\infty \in [0, r_1]$, że $f(x_\infty) = \infty$. Wstawiając $x = x_\infty, y = r_1 - x_\infty$ do (J), dostajemy

$$\infty = \infty + f(r_1 - x_\infty) = f(x_\infty) + f(r_1 - x_\infty) = 2f(\frac{x_\infty + r_1 - x_\infty}{2}) = 2f(\frac{r_1}{2}).$$

Następnie wstawmy $x = 0, y = r_1$ do (J) i dostaniemy $f(0) + f(r_1) = 2f(\frac{r_1}{2}) = \infty$, a stąd $f(0) = \infty$ lub $f(r_1) = \infty$.

- $f(0) = \infty$. Zauważmy, że dla dowolnego $x \in [0, \frac{r_1}{2}]$ mamy

  $$\infty = f(0) + f(2x) = 2f(x),$$

  zatem otrzymaliśmy, że $f([0, \frac{r_1}{2}]) = \{\infty\}$. Załóżmy teraz, że $f([0, \frac{2^n-1}{2^n} r_1]) = \{\infty\}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy dla dowolnego $x \in [\frac{2^n-1}{2^n} r_1, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} r_1]$ zachodzi $(2x - \frac{2^n-1}{2^n} r_1) \in [\frac{2^n-1}{2^n} r_1, r_1]$ oraz

  $$\infty = f(\frac{2^n-1}{2^n} r_1) + f(2x - \frac{2^n-1}{2^n} r_1) = 2f(x),$$

  czyli $f(x) = \infty$, zatem łącznie $f([0, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} r_1]) = \{\infty\}$. Pokazaliśmy w ten sposób indukcyjnie, że $f([0, \frac{2^n-1}{2^n} r_1]) = \{\infty\}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. A stąd wynika oczywiście, że $f([0, r_1)) = \{\infty\}$, ponieważ dla każdego $x \in [0, r_1)$ istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $x < \frac{2^n-1}{2^n} r_1$. Wartość $f(r_1)$ pozostaje dowolna, dostajemy zatem $f = \infty$ lub rozwiązanie (3.3).

- $f(r_1) = \infty$. Ten przypadek analizujemy analogicznie do poprzedniego i dostajemy $f = \infty$ lub rozwiązanie (3.2).

$\square$

W przypadku ostatniego twierdzenia, dla stałych $r_1 = r_2 = \infty$ oraz $f\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$, zaprezentujemy dwa zupełnie różne jego dowody. Pierwszy będzie podobny do przedstawionego przed chwilą dowodu twierdzenia 3.5, w drugim natomiast krótko wykorzystamy rozwiązania równania Cauchy'ego rozszerzonego do nieskończoności, wymienione w twierdzeniu 2.8. W tym celu potrzebny będzie nam lemat charakteryzujący związek pomiędzy rozwiązaniami równania Cauchy'ego (C) oraz równania Jensena (J).

Lemat 3.6 (por. [53, Theorem XII.2.1])**.** *Niech* $f\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$ *będzie taka, że* $f(0) < \infty$. *Funkcja* f *spełnia równanie Jensena* (J) *wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja* $f - f(0)$ *spełnia równanie Cauchy'ego* (C).

Dowód. Jeżeli f spełnia (J), to dla dowolnych $x, y \in [0, \infty]$ zachodzi

$$f(x) + f(y) = 2f(\frac{x+y}{2}) = f(x+y) + f(0).$$

Odejmując od obu stron równania $2f(0)$, dostaniemy równanie Cauchy'ego (C) dla funkcji $f - f(0)$. Jeśli zaś funkcja $f - f(0)$ jest spełnia (C), to dla dowolnych $x, y \in [0, \infty]$ zachodzi

$$(f(x) - f(0)) + (f(y) - f(0)) = f(x+y) - f(0) = (f(\frac{x+y}{2}) - f(0)) + (f(\frac{x+y}{2}) - f(0)).$$

Tym razem dodając $2f(0)$ do obu stron równania, dostaniemy równanie Jensena (J) dla funkcji f. □

Lemat 3.6 jest oczywiście prawdziwy także dla funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ważne jest założenie o tym, że $f(0) \neq \infty$. W przeciwnym razie zachodziłoby $(f - f(0))(0) = f(0) - f(0) = \infty - \infty$, a wynik takiej różnicy jest nieokreślony.

Twierdzenie 3.7. *Niech $f\colon [0, \infty] \to [0, \infty]$. Wówczas następujące zdania są równoważne:*

(i) Funkcja f spełnia równanie Jensena (J) *dla $x, y \in [0, \infty]$.*

(ii) Zachodzi $f = \infty$ lub istnieje takie $d \in [0, \infty)$, że $f = d$, lub

$$f(x) = \begin{cases} d, & x = 0, \\ \infty, & x > 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

lub istnieją $c, d \in [0, \infty)$, takie że

$$f(x) = \begin{cases} cx + d, & x < \infty, \\ \infty, & x = \infty, \end{cases} \tag{3.6}$$

dla wszystkich $x \in [0, \infty]$.

Dowód nr 1. „*(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)*"
Niech $g := f|_{\mathbb{R}}$, czyli $g\colon [0, \infty) \to [0, \infty]$ i oczywiście g spełnia (J) dla $x, y \in [0, \infty)$.

1). Załóżmy najpierw, że g przyjmuje jedynie wartości rzeczywiste. Wówczas zgodnie z lematem 3.2 istnieją takie nieujemne $c, d \in [0, \infty)$, że $g(x) = cx + d$ dla $x \in [0, \infty)$. Mamy więc także $f(x) = cx + d$ dla $x \in [0, \infty)$. Jeżeli $f(\infty) = \infty$, to otrzymujemy rozwiązanie (3.6). Jeśli zaś $f(\infty) < \infty$, to wstawmy $x = \infty$ oraz $y \in [0, \infty)$ do (J) dla funkcji f

$$f(\infty) + cy + d = f(\infty) + f(y) = 2f(\frac{\infty + y}{2}) = 2f(\infty),$$

a stąd $f(\infty) = cy + d$ dla dowolnych $y \in [0, \infty)$. Zatem $c = 0$ oraz $f = d$.

2). Rozważmy teraz drugą możliwość, tj. że istnieje takie $x_\infty \in [0, \infty)$, że $g(x_\infty) = \infty$. Dla $x \geqslant \frac{1}{2}x_\infty$ zachodzi

$$\infty = \infty + g(2x - x_\infty) = g(x_\infty) + g(2x - x_\infty) = 2g(\frac{x_\infty + (2x - x_\infty)}{2}) = 2g(x).$$

Zatem $g(x) = \infty$ dla każdego $x \geqslant \frac{1}{2}x_\infty$. Załóżmy teraz, że $g([\frac{1}{2^n}x_\infty, \infty)) = \{\infty\}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Dla $x \geqslant \frac{1}{2^{n+1}}x_\infty$ zachodzi $(2x - \frac{1}{2^n}x_\infty) \geqslant 0$ oraz

$$\infty = g(\frac{1}{2^n}x_\infty) + g(2x - \frac{1}{2^n}x_\infty) = 2g(x).$$

Zatem $g([\frac{1}{2^{n+1}}x_\infty, \infty)) = \{\infty\}$. Pokazaliśmy w ten sposób indukcyjnie, że $g([\frac{1}{2^n}x_\infty, \infty)) = \{\infty\}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Stąd $g((0,\infty)) = \{\infty\}$, ponieważ dla każdego $x \in (0,\infty)$ istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $x > \frac{1}{2^n}x_\infty$. Wartość $g(0)$ pozostaje dowolna, może zatem zachodzić $g = \infty$ lub

$$g(x) = \begin{cases} d, & x = 0, \\ \infty, & x > 0, \end{cases}$$

dla pewnego $d \in [0,\infty)$.

Wróćmy do szukanej funkcji f. Ponieważ $f\big|_{\mathbb{R}} = g$, to pozostaje znaleźć wartość $f(\infty)$. Okazuje się, że w obu przypadkach jest to ∞. Otóż wstawmy $x = \infty$ oraz $y \in (0,\infty)$ do (J) dla funkcji f, a otrzymamy

$$\infty = f(\infty) + \infty = f(\infty) + g(y) = f(\infty) + f(y) = 2f(\frac{\infty + y}{2}) = 2f(\infty).$$

Ostatecznie więc $f = \infty$ lub f jest postaci (3.5). □

Dowód nr 2. „$(i) \Longrightarrow (ii)$"
Niech f spełnia równanie Jensena (J). Jeżeli $f(0) = \infty$, to

$$\infty = f(0) + f(x) = 2f(\frac{x}{2}), \qquad x \in [0,\infty],$$

a stąd $f = \infty$. W przeciwnym razie niech $d = f(0)$, $d \in [0,\infty)$. Wówczas z lematu 3.6 funkcja $g := f - d$ spełnia równanie Cauchy'ego (C). Ponieważ $g(0) = f(0) - d = 0$, to z twierdzenia 2.8 wynika, że $g = 0$ lub g postaci (2.10), (2.11) lub (2.12) (rozwiązanie $g = \infty$ nie jest możliwe). Stąd $f = g + d$ jest równe d albo jest postaci (3.5), lub (3.6). □

Aby nasze rozważania dotyczące równania Jensena rozszerzonego do nieskończoności były bardziej kompletne, znajdziemy także rozwiązania tego równania wśród funkcji $f\colon X \to Y$ dla $X = Y = [-\infty,\infty]$, badając wszystkie cztery możliwe kombinacje założeń $(A+)/(A-)$ na zbiorach X oraz Y. Zauważmy, że przesunięcia i odbicia rozwiązań (J) pozostają oczywiście rozwiązaniami (J), zatem mając w ręku wniosek 3.3, twierdzenia 3.4 - 3.7 oraz kolejne twierdzenia 3.11 - 3.14, będziemy w stanie określić rozwiązania równania Jensena wśród funkcji, których dziedziny oraz przeciwdziedziny są dowolnymi domkniętymi podzbiorami zbiorów $[-\infty,\infty]$.

W tym miejscu należy poczynić jeszcze jedną uwagę. Otóż w lemacie 3.6 udowodniliśmy, że dla funkcji $f\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$, takiej że $f(0) < \infty$, zachodzi równoważność: funkcja f spełnia równanie Jensena (J) wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f - f(0)$ spełnia równanie Cauchy'ego (C). Chwilę później zauważyliśmy, że równoważność ta jest prawdziwa także dla funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Naturalnym zatem pytaniem jest, czy owa równoważność zachodzi również w przypadku funkcji $f\colon [-\infty,\infty] \to [-\infty,\infty]$? Wówczas rozwiązanie równania Jensena (J) sprowadziłoby się do prostego przesunięcia rozwiązań równania Cauchy'ego (C), które przedstawiliśmy w twierdzeniach (2.15) - (2.18) w podrozdziale 2.2.3. Tak jednak się nie dzieje. O związkach pomiędzy rozwiązaniami dwóch najbardziej znanych równań funkcyjnych wśród funkcji prowadzących z $[-\infty,\infty]$ w siebie traktują kolejne dwie uwagi.

Uwaga 3.8. Niech $f\colon X \to Y$, gdzie $X, Y = [-\infty,\infty]$. Jeśli funkcja f spełnia równanie Jensena (J), to funkcja $f - f(0)$ jest addytywna.

Dowód. Jeśli funkcja f spełnia równanie Jensena (J), to w szczególnościci dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$f(x) + f(y) = 2f(\frac{x+y}{2}) = f(x+y) + f(0).$$

Jeśli $f(0) \in \mathbb{R}$, to możemy odjąć $2f(0)$ od obu stron równania i dostaniemy

$$f(x) - f(0) + f(y) - f(0) = f(x+y) - f(0),$$

czyli $f - f(0)$ jest funkcją addytywną.

Rozważmy teraz sytuację, gdy na przestrzeni Y zakłada się $(A+)$. Jeśli $f(0) = \infty$, to dla dowolnego $x \in X$ z (J) dostajemy

$$\infty \overset{(A+)}{=} f(0) + f(2x) = 2f(x),$$

czyli $f = \infty$. Wówczas $f - f(0) = \infty - \infty = \infty + (-\infty) \overset{(A+)}{=} \infty$, a ∞ jest oczywiście addytywna.

Jesli wreszcie $f(0) = -\infty$, to $f - f(0) = f - (-\infty) = f + \infty \overset{(A+)}{=} \infty$ i ponownie stwierdzamy, że funkcja stale równa ∞ jest addytywna.

Sytuację, gdy na przestrzeni Y zakłada się $(A-)$, rozważa się analogicznie. □

Uwaga 3.9. Niech $f\colon X \to Y$, gdzie $X, Y = [-\infty, \infty]$. Nieprawdziwa jest implikacja: jeśli funkcja $f - f(0)$ jest addytywna, to funkcja f spełnia równanie Jensena (J).

Dowód. Jeśli w przestrzeni Y zakłada się $(A+)$, wówczas niech

$$f(x) = \begin{cases} -\infty, & x \leqslant 1, \\ \infty, & x > 1. \end{cases}$$

Wtedy $f - f(0) = f - (-\infty) = f + \infty = \infty$ jest oczywiście funkcją addytywną. Jednocześnie dla przykładowych wartości $x = 0, y = 2$ równanie Jensena (J) dla funkcji f nie jest spełnione:

$$\infty \overset{(A+)}{=} -\infty + \infty = f(0) + f(2) \neq 2f(1) = 2 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Jeśli w przestrzeni Y zakłada się $(A-)$, wówczas kontrprzykład może stanowić funkcja $-f$. □

Treść ostatniej uwagi tłumaczy konieczność rozwiązania równania Jensena (J) wśród funkcji prowadzących z $[-\infty, \infty]$ w siebie bez wykorzystania znajomości rozwiązań równania Cauchy'ego (C). Kolejny lemat i cztery twierdzenia scharakteryzują rozwiązania (J) dla wszystkich kombinacji założeń $(A+)/(A-)$ na dziedzinie i przeciwdziedzinie funkcji. Lemat oraz pierwsze z twierdzeń (dotyczące przypadku, gdy zakładamy wszędzie $(A+)$) podane są z dowodami, w pozostałych przypadkach dowody są w niniejszej pracy pominięte jako analogiczne.

Lemat 3.10. *Niech $X = [-\infty, \infty]$. Dla funkcji $f\colon \mathbb{R} \to X$ następujące zdania są równoważne:*

(i) f spełnia równanie Jensena (J) *dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$, z założeniem $(A+)$, tj. $(-\infty)+\infty = \infty + (-\infty) = \infty$, na zbiorze X.*

(ii) $f = -\infty$ lub $f = \infty$ lub f jest jensenowska.

Dowód. $(i) \Leftarrow (ii)$
Jest to oczywiste.

$(i) \Rightarrow (ii)$
Jeśli f przyjmuje jedynie wartości rzeczywiste, to oczywiście $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i f jest jensenowska. Jeśli istnieje $x_\infty \in \mathbb{R}$, takie że $f(x_\infty) = \infty$, to z (J) otrzymujemy dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, że

$$\infty \overset{(A+)}{=} \infty + f(2x - x_\infty) = f(x_\infty) + f(2x - x_\infty) = 2f\Big(\frac{x_\infty + (2x - x_\infty)}{2}\Big) = 2f(x),$$

skąd $f = \infty$.

Ostatnia możliwość to, że $f(x) < \infty$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, ale istnieje $x_{-\infty} \in \mathbb{R}$, takie że $f(x_{-\infty}) = -\infty$. Wówczas dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$-\infty = -\infty + f(2x - x_{-\infty}) = f(x_{-\infty}) + f(2x - x_{-\infty}) = 2f(x).$$

A zatem $f = -\infty$. □

Twierdzenie 3.11. *Niech $X = Y = [-\infty, \infty]$. Dla funkcji $f\colon X \to Y$ następujące zdania są równoważne:*

(i) f spełnia równanie Jensena (J) *dla wszystkich $x, y \in X$, z założeniem $(A+)$, tj. $(-\infty) + \infty = \infty + (-\infty) = \infty$, na obu zbiorach X oraz Y.*

(ii) $f = -\infty$ lub $f = \infty$, lub

$$f(x) = \begin{cases} -\infty, & x < \infty, \\ \infty, & x = \infty, \end{cases} \quad (3.7) \qquad \text{lub} \quad f(x) = \begin{cases} \infty, & x \in \{-\infty, \infty\}, \\ -\infty, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.8)$$

lub istnieje stała $c \in \mathbb{R}$ taka, że $f = c$ lub

$$f(x) = \begin{cases} c, & x < \infty, \\ -\infty, & x = \infty, \end{cases} \quad (3.9) \qquad \text{lub} \quad f(x) = \begin{cases} c, & x < \infty, \\ \infty, & x = \infty, \end{cases} \quad (3.10)$$

lub istnieje funkcja jensenowska $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że

$$f(x) = \begin{cases} \infty, & x \in \{-\infty, \infty\}, \\ g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.11) \qquad \text{lub} \quad f(x) = \begin{cases} -\infty, & x \in \{-\infty, \infty\}, \\ g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\text{lub} \quad f(x) = \begin{cases} -\infty, & x = -\infty, \\ g(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \infty, & x = \infty. \end{cases} \quad (3.13)$$

Dowód. $(i) \Leftarrow (ii)$
Dowód w tę stronę polega na bezpośrednim przeliczeniu, że wszystkie powyższe funkcje spełniają

równanie Jensena (J), przy założeniu $(A+)$ na obu zbiorach X i Y.

$(i) \Rightarrow (ii)$

Zakładamy, że $f\colon X \to Y$, gdzie $X = Y = [-\infty, \infty]$ z założeniem $(A+)$ na obu tych zbiorach, spełnia równanie Jensena (J). Jeśli $f(\infty)$ jest skończone, tj. istnieje $c \in \mathbb{R}$, takie że $f(\infty) = c$, to dla dowolnego $x \in X$ mamy $f(x) + f(\infty) = 2f(\infty)$, czyli $f(x) + c = 2c$, a stąd $f = c$.

Odtąd zakładamy, że $f(\infty) \in \{-\infty, \infty\}$. Jeśli $f(-\infty)$ jest skończone, tj. istnieje $c \in \mathbb{R}$ takie, że $f(-\infty) = c$, to dla dowolnego $x < \infty$ mamy $f(x) + f(-\infty) = 2f(-\infty)$, czyli $f(x) + c = 2c$, a stąd $f(x) = c$. Definiując brakującą wartość $f(\infty)$ jako $-\infty$ lub ∞, otrzymujemy pierwsze dwa rozwiązania (3.9) oraz (3.10).

Pozostaje nam rozważyć wszystkie możliwe kombinacje wartości $f(-\infty), f(\infty) \in \{-\infty, \infty\}$. Przypadek, gdy $f(-\infty) = \infty$ oraz $f(\infty) = -\infty$ jest sprzeczny. Faktycznie, wstawiając do równania (J) wartości $x = -\infty$, $y = \infty$ i korzystając z założenia $(A+)$ na obu zbiorach X, Y, dostalibyśmy

$$\infty \overset{(A+)}{=} -\infty + \infty = f(\infty) + f(-\infty) = 2f\left(\frac{\infty + (-\infty)}{2}\right) \overset{(A+)}{=} 2f(\infty) = -\infty.$$

Zauważmy teraz, że $f|_{\mathbb{R}}$ z Lematu 3.10 jest jensenowska lub równa $-\infty$, lub ∞. Jeśli $f(-\infty)$, $f(\infty) = \infty$, to rozważając kolejno wymienione przed chwilą trzy możliwe postacie funkcji $f|_{\mathbb{R}}$, otrzymujemy odpowiednio rozwiązania (3.11), (3.8) lub $f = \infty$.

Jeśli $f(-\infty), f(\infty) = -\infty$, to niemożliwe jest, aby $f|_{\mathbb{R}} = \infty$. Faktycznie, wstawiając do równania (J) dowolne $x \in \mathbb{R}$ oraz $y = \infty$ i korzystając z założenia $(A+)$ na zbiorze Y, dostalibyśmy

$$\infty \overset{(A+)}{=} \infty - \infty = f(x) + f(\infty) = 2f(\frac{x + \infty}{2}) \overset{(A+)}{=} 2f(\infty) = -\infty.$$

Zatem rozważając pozostałe dwie możliwe postacie $f|_{\mathbb{R}}$, odpowiednio $f|_{\mathbb{R}}$ jensenowską oraz $f|_{\mathbb{R}} = -\infty$, otrzymujemy rozwiązania (3.12) oraz $f = -\infty$.

W ostatnim przypadku gdy $f(-\infty) = -\infty$ oraz $f(\infty) = \infty$, w podobny sposób można pokazać, że $f(x) < \infty$ dla $x \in \mathbb{R}$, dostajemy zatem dwa ostatnie rozwiązania: dla $f|_{\mathbb{R}}$ jensenowskiej rozwiązanie (3.13) oraz dla $f|_{\mathbb{R}} = -\infty$ rozwiązanie (3.7). □

Twierdzenie 3.12. *Niech $X = Y = [-\infty, \infty]$. Dla funkcji $f\colon X \to Y$ następujące zdania są równoważne:*

(i) f spełnia równanie Jensena (J) dla wszystkich $x, y \in X$, z założeniem $(A-)$, tj. $(-\infty) + \infty = \infty + (-\infty) = \infty$, na obu zbiorach X oraz Y.

(ii) $f = -\infty$ lub $f = \infty$, lub

$$f(x) = \begin{cases} -\infty, & x = -\infty, \\ \infty, & x > -\infty, \end{cases} \quad (3.14) \qquad \text{lub} \quad f(x) = \begin{cases} -\infty, & x \in \{-\infty, \infty\}, \\ \infty, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.15)$$

lub istnieje stała $c \in \mathbb{R}$ taka, że $f = c$ lub

$$f(x) = \begin{cases} c, & x > -\infty, \\ -\infty, & x = -\infty, \end{cases} \quad (3.16) \qquad \text{lub} \quad f(x) = \begin{cases} c, & x > -\infty, \\ \infty, & x = -\infty, \end{cases} \quad (3.17)$$

lub istnieje funkcja jensenowska $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, taka że* f *przyjmuje postać* (3.11), (3.12) *lub* (3.13).

Twierdzenie 3.13. *Niech* $X = Y = [-\infty, \infty]$*. Dla funkcji* $f\colon X \to Y$ *następujące zdania są równoważne:*

(i) f *spełnia równanie Jensena* (J) *dla wszystkich* $x, y \in X$*, z założeniem* $(A-)$ *na zbiorze* X *oraz* $(A+)$ *na zbiorze* Y*.*

(ii) $f = -\infty$ *lub* $f = \infty$*, lub* f *przyjmuje postać* (3.8)*, lub*

$$f(x) = \begin{cases} -\infty, & x > -\infty, \\ \infty, & x = -\infty, \end{cases} \tag{3.18}$$

lub istnieje stała $c \in \mathbb{R}$ *taka, że* $f = c$ *lub* f *przyjmuje postać* (3.16) *albo* (3.17)*, lub istnieje funkcja jensenowska* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, taka że* f *przyjmuje postać* (3.11), (3.12) *lub*

$$f(x) = \begin{cases} \infty, & x = -\infty, \\ g(x), & x \in \mathbb{R}, \\ -\infty, & x = \infty. \end{cases} \tag{3.19}$$

Twierdzenie 3.14. *Niech* $X = Y = [-\infty, \infty]$*. Dla funkcji* $f\colon X \to Y$ *następujące zdania są równoważne:*

(i) f *spełnia równanie Jensena* (J) *dla wszystkich* $x, y \in X$*, z założeniem* $(A+)$ *na zbiorze* X *oraz* $(A-)$ *na zbiorze* Y*.*

(ii) $f = -\infty$ *lub* $f = \infty$*, lub* f *przyjmuje postać* (3.15)*, lub*

$$f(x) = \begin{cases} -\infty, & x = \infty, \\ \infty, & x < \infty, \end{cases} \tag{3.20}$$

lub istnieje stała $c \in \mathbb{R}$*, taka że* $f = c$ *lub* f *przyjmuje postać* (3.9) *albo* (3.10)*, lub istnieje funkcja jensenowska* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, taka że* f *przyjmuje postać* (3.11), (3.12) *lub* (3.19).

3.1.2 Rozwiązania równania $f(m_1(x+y)) = m_2(f(x) + f(y))$

W niniejszym podrozdziale, jak tytuł na to wskazuje, scharakteryzujemy rozwiązania równania (M), gdzie $m_1\colon [0, 2r_1] \to [0, r_1], m_2\colon [0, 2r_2] \to [0, r_2]$ oraz $f\colon [0, r_1] \to [0, r_2]$, a stałe $r_1, r_2 \in (0, \infty]$ mogą być skończone lub nieskończone. Cały czas będziemy mieli jedno dodatkowe założenie, że funkcja m_2 jest różnowartościowa. Dowody głównych twierdzeń 3.15, 3.16, 3.17 oraz 3.21 będą oparte na wynikach z poprzedniego podrozdziału.

Twierdzenie 3.15. *Niech* $r_1, r_2 \in (0, \infty)$ *oraz niech* $m_1\colon [0, 2r_1] \to [0, r_1]$*,* $m_2\colon [0, 2r_2] \to [0, r_2]$*,* $f\colon [0, r_1] \to [0, r_2]$ *będą danymi funkcjami. Ponadto niech funkcja* m_2 *będzie różnowartościowa. Wówczas następujące zdania są równoważne:*

(i) Trójka funkcji (m_1, m_2, f) *spełnia równanie* (M) *dla* $x, y \in [0, r_1]$*.*

(ii) Zachodzi $f = d$ oraz $m_2(2d) = d$ dla pewnego $d \in [0, r_2]$, lub $f(x) = cx + d$ dla pewnych $c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, takich że $cx + d \in [0, r_2]$ dla wszystkich $x \in [0, r_1]$, oraz

$$m_1(x) = \frac{m_2(cx + 2d) - d}{c}, \tag{3.21}$$

dla $x \in [0, 2r_1]$.

Dowód. „$(ii) \Longrightarrow (i)$”
Nietrudno sprawdzić, że powyższe funkcje spełniają (M). Istotnie, w przypadku $f = d$ równanie (M) jest spełnione, jeśli tylko $m_2(2d) = d$. W drugim przypadku dla wszystkich $x, y \in [0, r_1]$ mamy

$$\begin{aligned} f(m_1(x + y)) &= cm_1(x + y) + d = c\frac{m_2(c(x + y) + 2d) - d}{c} + d \\ &= m_2(cx + d + cy + d) = m_2(f(x) + f(y)). \end{aligned}$$

„$(i) \Longrightarrow (ii)$”
Z lematu 3.1 otrzymujemy, że f spełnia równanie Jensena (J). Następnie z wniosku 3.3 istnieją takie $c, d \in \mathbb{R}$, że $f(x) = cx + d$, $x \in [0, r_1]$. Rozważmy najpierw przypadek, gdy $c = 0$. Wówczas $f(x) = d$, $x \in [0, r_1]$, i z (M) otrzymujemy, że $m_2(2d) = d$. Jeśli natomiast $c \neq 0$, to z (M) dostajemy

$$cm_1(x + y) + d = m_2(cx + d + cy + d), \qquad x, y \in [0, r_1].$$

Oznaczając powyżej $x + y$ przez z, otrzymujemy

$$cm_1(z) + d = m_2(cz + 2d), \qquad z \in [0, 2r_1],$$

co jest równoważne z warunkiem (3.21). □

Oczywiście oba rozwiązania w twierdzeniu 3.15 są ciągłe. Ciągłe również jest jedyne rozwiązanie w przypadku, gdy $r_1 = \infty$ a r_2 pozostaje skończone, zawarte w kolejnym twierdzeniu 3.16.

Dowody implikacji „$(ii) \Longrightarrow (i)$” w twierdzeniach 3.16, 3.17 i 3.21 polegają na elementarnych, acz często żmudnych przeliczeniach analogicznych do tych z dowodu twierdzenia 3.15, pomijamy je zatem w niniejszej pracy.

Twierdzenie 3.16. *Niech $r_2 \in (0, \infty)$ oraz niech $m_1 \colon [0, \infty] \to [0, \infty]$, $m_2 \colon [0, 2r_2] \to [0, r_2]$, $f \colon [0, \infty] \to [0, r_2]$ będą danymi funkcjami. Ponadto, niech funkcja m_2 będzie różnowartościowa. Wówczas następujące zdania są równoważne:*

(i) Trójka funkcji (m_1, m_2, f) spełnia równanie (M) dla $x, y \in [0, \infty]$.

(ii) $f = d$ oraz $m_2(2d) = d$ dla pewnego $d \in [0, r_2]$.

Dowód. „$(i) \Longrightarrow (ii)$”
Z lematu 3.1 otrzymujemy, że f spełnia równanie Jensena (J). Następnie z twierdzenia 3.4 funkcja f jest stała, tj. istnieje takie $d \in [0, r_2]$, że $f = d$. Wreszcie, z równania (M) dostajemy, że $m_2(2d) = d$. □

W pozostałych dwóch przypadkach, kiedy $r_2 = \infty$, czyli przeciwdziedzina funkcji f jest rozszerzona do nieskończoności, pojawiają się również nieciągłe rozwiązania równania (M). Jakkolwiek owa nieciągłość występuje jedynie na krańcach dziedziny funkcji f.

Twierdzenie 3.17. *Niech $r_1 \in (0,\infty)$ oraz niech $m_1\colon [0,2r_1] \to [0,r_1]$, $m_2\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$, $f\colon [0,r_1] \to [0,\infty]$ będą danymi funkcjami. Ponadto niech funkcja m_2 będzie różnowartościowa. Wówczas trójka funkcji (m_1, m_2, f) spełnia równanie* (M) *dla $x, y \in [0,r_1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jedna z poniższych możliwości:*

(i) $f = \infty$ *oraz* $m_2(\infty) = \infty$*;*

(ii) *istnieje takie $d \in [0,\infty)$, że f przyjmuje postać* (3.2)*, tj.*

$$f(x) = \begin{cases} d, & x = 0, \\ \infty, & x > 0, \end{cases} \qquad x \in [0,r_1],$$

oraz ($m_1(0) = 0, m_1(x) > 0$ dla wszystkich $x > 0$, $m_2(2d) = d$ i $m_2(\infty) = \infty$) albo ($m_1(0) > 0, m_1(x) = 0$ dla wszystkich $x > 0$, $m_2(2d) = \infty$ i $m_2(\infty) = d$);

(iii) *istnieje takie $d \in [0,\infty)$, że f przyjmuje postać* (3.3)*, tj.*

$$f(x) = \begin{cases} \infty, & x < r_1, \\ d, & x = r_1, \end{cases} \qquad x \in [0,r_1],$$

oraz ($m_1(2r_1) = r_1, m_1(x) < r_1$ dla wszystkich $x < 2r_1$, $m_2(2d) = d$ i $m_2(\infty) = \infty$) albo ($m_1(2r_1) < r_1, m_1(x) = r_1$ dla wszystkich $x < 2r_1$, $m_2(2d) = \infty$ i $m_2(\infty) = d$);

(iv) *istnieją takie $c, d \in [0,\infty)$, że f przyjmuje postać* (3.4)*, tj.*

$$f(x) = cx + d \qquad x \in [0,r_1],$$

oraz jeśli $c = 0$, to $m_2(2d) = d$, a jeśli $c > 0$, to dla $x \in [0,2r_1]$ zachodzi (3.21)*, tj.*

$$m_1(x) = \frac{m_2(cx + 2d) - d}{c}.$$

Dowód. „$\Longrightarrow$”
Z lematu 3.1 otrzymujemy, że funkcja f spełnia równanie Jensena (J). Następnie z twierdzenia 3.5 f równa jest nieskończoności lub przyjmuje postać (3.2), (3.3) lub (3.4). Pozostaje nam uzasadnić, że m_1 oraz m_2 spełniają wówczas podane w twierdzeniu warunki. Rozważymy kolejno cztery przypadki.

1) $f = \infty$. Wówczas równanie (M) przyjmuje postać $\infty = m_2(\infty)$.

2) f jest postaci (3.2). Wstawiając $x = y = 0$ do (M), dostajemy

$$f(m_1(0)) = m_2(f(0) + f(0)) = m_2(2d).$$

Istnieją dwie możliwości:

(A1) $m_1(0) = 0$ i wtedy $m_2(2d) = f(0) = d$;

(A2) $m_1(0) > 0$ i wtedy $m_2(2d) = \infty$.

Następnie wstawmy do (M) parę x, y, taką że $x+y > 0$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x > 0$. Dostajemy wtedy $f(m_1(x+y)) = m_2(\infty + f(y)) = m_2(\infty)$, co równoważnie możemy zapisać jako

$$f(m_1(x)) = m_2(\infty), \qquad x \in (0, 2r_1].$$

Jeżeli istnieje takie $x_1 \in (0, 2r_1]$, że $m_1(x_1) = 0$, to z powyższej równości mamy, że $m_2(\infty) = f(m_1(x_1)) = f(0) = d$. Jeśli natomiast istnieje takie $x_2 \in (0, 2r_1]$, że $m_1(x_2) > 0$, to dostajemy $m_2(\infty) = f(m_1(x_2)) = \infty$. Ponieważ funkcja m_2 może przyjąć w nieskończoności tylko jedną wartość, to oznacza, że x_1 oraz x_2 nie mogą istnieć jednocześnie. Mamy zatem znowu tylko dwie możliwości:

(B1) $m_1(x) = 0$ dla każdego $x \in (0, 2r_1]$ i wtedy $m_2(\infty) = d$;

(B2) $m_1(x) > 0$ dla każdego $x \in (0, 2r_1]$ i wtedy $m_2(\infty) = \infty$.

Funkcja m_2 jest różnowartościowa oraz $d \neq \infty$, więc (A1) nie może zachodzić jednocześnie z (B1), a (A2) z (B2). Pozostałe kombinacje (A1) z (B2) oraz (A2) z (B1) uzupełniają tezę w analizowanym przypadku.

3) f jest postaci (3.3). Ten przypadek analizujemy analogicznie do przypadku 2). Pomijamy tutaj szczegóły.

4) f jest postaci (3.4), czyli istnieją takie $c, d \in [0, \infty)$, że $f(x) = cx + d$, $x \in [0, r_1]$. Jeżeli $c = 0$, to $f = d$ i równanie (M) przyjmuje postać $d = m_2(2d)$. Jeśli natomiast $c > 0$, to równanie (M) przyjmuje postać

$$cm_1(x+y) + d = m_2(cx + d + cy + d) = m_2(c(x+y) + 2d), \qquad x, y \in [0, r_1],$$

co równoważnie możemy zapisać jako

$$m_1(x) = \frac{m_2(cx + 2d) - d}{c}, \qquad x \in [0, 2r_1],$$

a to kończy dowód.

□

Wniosek 3.18. *Niech $r_1 \in (0, \infty)$. Dla ciągłej funkcji $f\colon [0, r_1] \to [0, \infty]$ oraz funkcji m_1, m_2 spełniających założenia twierdzenia 3.17 następujące zdania są równoważne:*

(i) Trójka funkcji (m_1, m_2, f) spełnia równanie funkcyjne (M) dla wszystkich $x, y \in [0, r_1]$.

(ii) Zachodzi $f = \infty$ oraz $m_2(\infty) = \infty$ lub $f(x) = cx + d$, $x \in [0, \infty]$, dla pewnych $c, d \in [0, \infty)$ oraz m_1, m_2 spełniają warunki z (iv) z twierdzenia 3.17.

Wniosek 3.19. *Możemy otrzymać rozwiązania równania (2.5), mianowicie*

$$f(\min(x+y, r_1)) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in [0, r_1],$$

przedstawione w twierdzeniu 2.7, jako wniosek z twierdzenia 3.17, wstawiając w nim $\min(\,\cdot\,, r_1)$ jako m_1 oraz identyczność jako m_2.

Dowód. Niech $r_1 \in (0, \infty)$ oraz $m_1(x) = \min(x, r_1)$ dla $x \in [0, 2r_1]$. Następnie niech $m_2(x) = x$ dla $x \in [0, \infty]$. Przeanalizujmy kolejne rozwiązania (M) wymienione w twierdzeniu 3.17.

(i) Zachodzi $m_2(\infty) = \infty$, zatem mamy pierwsze rozwiązanie $f = \infty$.

(ii) Dla $d \in [0, \infty)$ zachodzi $m_2(2d) = 2d = d \iff d = 0$. Jednocześnie $m_1(0) = \min(0, r_1) = 0$ oraz $m_1(x) = \min(x, r_1) > 0$ dla $x > 0$. Mamy zatem drugie rozwiązanie postaci (3.2) z $d = 0$, czyli f jest postaci (2.7).

(iii) Mamy $m_1(2r_1) = r_1$ oraz $m_1(r_1) = r_1 \not< r_1$, stąd funkcja m_1 nie spełnia odpowiednich warunków i nie dostajemy nowych rozwiązań w tym przypadku.

(iv) Jeżeli $c = 0$, to $m_2(2d) = 2d = d$ jest prawdziwe tylko dla $d = 0$, jeśli $d < \infty$. Mamy zatem trzecie rozwiązanie $f = 0$. Jeśli $c > 0$, to do (3.21) wstawmy najpierw $x = 0$

$$0 = m_1(0) = \frac{m_2(c \cdot 0 + 2d) - d}{c} = \frac{d}{c},$$

skąd $d = 0$, a następnie $x = 2r_1$

$$r_1 = m_1(2r_1) = \frac{m_2(c \cdot 2r_1)}{c} = 2r_1,$$

sprzeczność. Zatem nie dostajemy nowych rozwiązań w tym przypadku.

Łącznie otrzymaliśmy, że $f = \infty$ lub $f = 0$, lub f jest postaci (2.7). Są to dokładnie wszystkie rozwiązania równania (2.5) (wymienione w twierdzeniu 2.7). □

Kończąc analizę przypadku, gdy $r_1 < \infty$ oraz $r_2 = \infty$, a $f\colon [0, r_1] \to [0, \infty]$, zaprezentujemy zastosowanie twierdzenia 3.17 do rozwiązania równania (M) dla dwóch par funkcji m_1, m_2 różnych od minimum oraz identyczności.

Przykład 3.20. Ustalmy $r \in (0, \infty)$ oraz niech

$$\begin{aligned} m_1(x) &= \frac{x}{4} e^{x-2r}, \qquad & x \in [0, 2r], \\ m_2(x) &= e^x - 1, \qquad & x \in [0, \infty]. \end{aligned}$$

Przeanalizujmy kolejne rozwiązania $f\colon [0, r] \to [0, \infty]$ równania (M) wymienione w twierdzeniu 3.17, podobnie jak to zrobiliśmy we wniosku 3.19.

(i) Zachodzi $m_2(\infty) = e^\infty - 1 = \infty$, stąd pierwsze rozwiązanie to $f = \infty$.

(ii) Dla $d \in [0, \infty)$ zachodzi

$$m_2(2d) = d \iff e^{2d} - 1 = d \iff d = 0.$$

Jednocześnie $m_1(0) = \frac{0}{4} \cdot e^{-2r} = 0$ oraz $m_1(x) > 0$ dla $x > 0$. Mamy zatem drugie rozwiązanie postaci (3.2) z $d = 0$, czyli f jest postaci (2.7).

(iii) Mamy $m_1(2r) = \frac{r}{2} \cdot e^0 = \frac{r}{2} < r$ oraz $m_2(\infty) = \infty$, stąd m_1, m_2 nie spełniają odpowiedniej kombinacji warunków i nie dostajemy nowych rozwiązań w tym przypadku.

(iv) Jeżeli $c = 0$, to stwierdziliśmy w (i), że $m_2(2d) = d \iff d = 0$, dla $d < \infty$. Mamy zatem trzecie rozwiązanie $f = 0$.

Jeżeli $c > 0$, to wstawiając do (3.21) kolejno $x = 0$ oraz $x = 2r$, dostaniemy, że $d = 0$ oraz $rc = 2e^{2rc}$. Drugie równanie nie ma rzeczywistych pierwiastków, toteż nie dostajemy nowych rozwiązań w tym przypadku.

Łącznie otrzymaliśmy, że $f = \infty$ lub $f = 0$, lub f jest postaci (2.7). Tutaj rozwiązania są dokładnie takie same jak rozwiązania równania (2.5).

Zmodyfikujemy teraz minimalnie definicję funkcji m_1, aby zilustrować, że możemy otrzymać również rozwiązania inne niż dla równania (2.5). Niech zatem

$$\begin{aligned} m_1(x) &= \frac{x}{2}e^{x-2r}, && x \in [0, 2r], \\ m_2(x) &= e^x - 1, && x \in [0, \infty]. \end{aligned}$$

W porównaniu z poprzednią parą funkcji m_1, m_2 istotna różnica pojawia się jedynie w (iii). Otóż tym razem $m_1(2r) = \frac{2r}{2} \cdot e^{2r-2r} = r$, $m_1(x) < r$ dla $x < 2r$ oraz nadal $m_2(\infty) = \infty$ i $m_2(2d) = d \iff d = 0$, o ile $d < \infty$. Otrzymujemy zatem, że dodatkowym rozwiązaniem (M) jest f postaci (3.3), wraz z $d = 0$.

Na koniec rozważymy ostatni przypadek, kiedy obie stałe r_1 i r_2 są nieskończone. Ponieważ dowód kolejnego twierdzenia jest analogiczny do dowodu twierdzenia 3.17, a dowód wniosku 3.22 jest analogiczny do dowodu wniosku 3.18, pominiemy je w tej pracy.

Twierdzenie 3.21. *Niech $m_1, m_2, f\colon [0, \infty] \to [0, \infty]$ będą danymi funkcjami. Ponadto niech funkcja m_2 będzie różnowartościowa. Wówczas trójka funkcji (m_1, m_2, f) spełnia równanie* (M) *dla $x, y \in [0, \infty]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jedna z poniższych możliwości:*

(i) $f = \infty$ oraz $m_2(\infty) = \infty$;

(ii) istnieje takie $d \in [0, \infty)$, że $f = d$ oraz $m_2(2d) = d$;

(iii) istnieje takie $d \in [0, \infty)$, że f przyjmuje postać (3.5)*, tj.*

$$f(x) = \begin{cases} d, & x = 0, \\ \infty, & x > 0, \end{cases} \qquad x \in [0, \infty],$$

oraz ($m_1(0) = 0, m_1(x) > 0$ dla wszystkich $x > 0$, $m_2(2d) = d$ i $m_2(\infty) = \infty$) albo ($m_1(0) > 0, m_1(x) = 0$ dla wszystkich $x > 0$, $m_2(2d) = \infty$ i $m_2(\infty) = d$);

(iv) istnieją takie $c, d \in [0, \infty)$, że f przyjmuje postać (3.6)*, tj.*

$$f(x) = \begin{cases} cx + d, & x < \infty, \\ \infty, & x = \infty, \end{cases} \qquad x \in [0, \infty].$$

Jeżeli $c = 0$, to ($m_1(\infty) = \infty, m_1(x) < \infty$ dla wszystkich $x < \infty$, $m_2(2d) = d$ i $m_2(\infty) = \infty$) albo ($m_1(\infty) < \infty, m_1(x) = \infty$ dla wszystkich $x < \infty$, $m_2(2d) = \infty$ i $m_2(\infty) = d$). Gdy $c \neq 0$, to dla $x \in [0, \infty]$ zachodzi (3.21)*, tj.*

$$m_1(x) = \frac{m_2(cx + 2d) - d}{c}.$$

Wniosek 3.22. *Dla ciągłej funkcji* $f\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$ *oraz funkcji* m_1, m_2 *spełniających założenia twierdzenia 3.21 następujące zdania są równoważne:*

(i) Trójka funkcji (m_1, m_2, f) *spełnia równanie funkcyjne* (M) *dla wszystkich* $x, y \in [0,\infty]$.

(ii) Zachodzi $f = \infty$ *oraz* $m_2(\infty) = \infty$ *lub* $f = d$ *oraz* $m_2(2d) = d$ *dla pewnego* $d \in [0,\infty)$, *lub* $f(x) = cx + d$, $x \in [0,\infty]$ *dla pewnych* $c, d \in [0,\infty)$, *takich że* $c \neq 0$, *oraz* m_1, m_2 *spełniają* (3.21) *dla* $x \in [0,\infty]$.

Wniosek 3.23. *Możemy otrzymać rozwiązania równania* (2.6), *mianowicie*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in [0,\infty],$$

przedstawione w twierdzeniu 2.8, jako wniosek z twierdzenia 3.21, wstawiając w nim identyczność jako m_1 *oraz* m_2.

3.2 Przypadek nieróżnowartościowej funkcji m_2

W tym podrozdziale rezygnujemy z wygodnego dla dowodów założenia, że funkcja m_2 jest różnowartościowa. Nie będziemy jednak rozważać równania (M) dla całkowicie dowolnych funkcji m_1, m_2, a nałożymy na nie pewne nowe założenia, które sprawią, że funkcje uogólniające minimum lub identyczność będą je w pewnym stopniu przypominać.

Mianowicie niech $f^r_{\min}(x) := \min(x, r)$ dla $x \in [0, 2r]$ i pewnej stałej $r \in (0,\infty)$. Od funkcji $f\colon [0, 2r] \to [0, r]$ uogólniającej $f^r_{\min}$ będziemy żądać po pierwsze, aby na pewnym swoim początkowym fragmencie była ciągła i ściśle rosnąca, a następnie stale równa swojej maksymalnej wartości r, po drugie zaś, aby wewnątrz swojej dziedziny była większa niż funkcja liniowa $\frac{1}{2}x$. Oczywiście oba te założenia spełnia uogólniana funkcja $f^r_{\min}$. Ale spełniają je również rozmaite inne funkcje i dla nich także udało nam się rozwiązać równanie (M) (porównaj: przykłady 3.31 - 3.34).

Tymczasem od funkcji $g\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$ uogólniających identyczność będziemy za każdym razem żądać, aby $g(0) = 0$, $g(\infty) = \infty$ oraz aby wewnątrz swojej dziedziny g miała wartości większe od funkcji liniowej $\frac{x}{2}$, ale skończone, tj. $g(x) \in (\frac{x}{2}, \infty)$ dla $x \in (0,\infty)$. Uogólniając równanie (2.4), tj.

$$f(x+y) = \min(f(x) + f(y), r_2), \qquad x, y \in [0,\infty],$$

dodamy żądanie, aby funkcja m_1 zastępująca identyczność była ciągła i różnowartościowa. Natomiast uogólnione równanie (2.5), tj.

$$f(\min(x+y, r_1)) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in [0, r_1],$$

dla różnowartościowej funkcji m_2 (która zastępuje tu identyczność) rozwiązaliśmy w poprzednim podrozdziale (patrz: twierdzenie 3.17). Tym razem udało nam się to zrobić bez założenia o injektywności m_2. Nie udało nam się jednak zrezygnować z założenia o różnowartościowości m_2 uogólniającej identyczność w równaniu (2.6), tj.

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in [0,\infty].$$

Rozwiązanie (M) w przypadku, gdy $r_1 = r_2 = \infty$ oraz m_2 jest nieróżnowartościowa, pozostaje zatem problemem otwartym.

Podrozdział ten podzielimy na trzy sekcje, w których rozwiążemy równania (2.3) - (2.5) uogólnione w opisany powyżej sposób.

3.2.1 Uogólnienie równania $f(\min(x+y, r_1)) = \min(f(x) + f(y), r_2)$

Uogólnioną wersję równania $f(\min(x+y, r_1)) = \min(f(x)+f(y), r_2)$ badaliśmy i opisywaliśmy w kilku pracach. Początkowo, w [23, 24] uzyskaliśmy jedynie częściową charakteryzację rozwiązań. Uzupełniliśmy ją w [22], jakkolwiek pełen dowód nie został dotąd opublikowany – czynimy to w tej dysertacji.

Twierdzenie 3.24. *Niech $r_1, r_2 \in (0, \infty)$ oraz niech $m_1 \colon [0, 2r_1] \to [0, r_1]$, $m_2 \colon [0, 2r_2] \to [0, r_2]$ będą ciągłymi funkcjami, ściśle rosnącymi na pewnych przedziałach $[0, x_1]$, $[0, x_2]$, odpowiednio, a następnie stale równymi odpowiednio r_1, r_2, na przedziałach $[x_1, 2r_1]$, $[x_2, 2r_2]$, gdzie $x_1 \leqslant r_1$, $x_2 \leqslant r_2$. Ponadto niech m_1, m_2 spełniają*

$$m_1(0) = 0, \qquad 2m_1(x) > x, \qquad x \in (0, 2r_1)$$

oraz

$$m_2(0) = 0, \qquad 2m_2(x) > x, \qquad x \in (0, 2r_2).$$

Wówczas dla dowolnej funkcji $f \colon [0, r_1] \to [0, r_2]$ trójka funkcji (m_1, m_2, f) spełnia równanie (M) *dla $x, y \in [0, r_1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jedna z poniższych możliwości:*

(i) $f = r_2$;

(ii) $f = 0$;

(iii) f *przyjmuje postać* (2.7), *tj.*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ r_2, & x > 0, \end{cases} \qquad x \in [0, r_1];$$

(iv) istnieje $x_0 \in (0, x_1]$, takie że

$$f(x) = \begin{cases} m_2(km_{10}^{-1}(x)), & x < m_1(x_0), \\ r_2, & x \geqslant m_1(x_0), \end{cases} \tag{3.22}$$

gdzie $x \in [0, r_1], k = \frac{x_2}{x_0}$ oraz $m_{10} = m_1|_{x \leqslant x_1}$.
Ponadto w tym przypadku $x_0 \leqslant m_1(x_0)$ oraz

$$km_1(x) = m_2(kx),$$

dla $x < y_0$, gdzie $y_0 = m_{10}^{-1}(x_0)$.

Przed dowodem sformułujmy następującą uwagę.

Uwaga 3.25. Zauważmy, że jeśli zachodzi przypadek (iv) z twierdzenia 3.24, to

$$f(x) = kx, \qquad\qquad x < x_0,$$

ponieważ

$$\begin{aligned} x < x_0 &\Longrightarrow m_{10}^{-1}(x) < y_0 \text{ oraz } x < m_1(x_0) \\ &\Longrightarrow f(x) = m_2(km_{10}^{-1}(x)) = km_1(m_{10}^{-1}(x)) = kx. \end{aligned}$$

Dowód twierdzenia 3.24.

„$\Longleftarrow$”

Oczywiście jeśli $f = 0$ lub $f = r_2$, to równanie (M) jest spełnione, jeśli tylko $m_2(0) = 0$ oraz $m_2(2r_2) = r_2$. Niech f będzie postaci (2.7). Wstawiając $x = y = 0$ do (M), otrzymujemy

$$\begin{aligned} LHS(\mathrm{M}) &= f(m_1(0+0)) = f(0) = 0, \\ RHS(\mathrm{M}) &= m_2(f(0) + f(0)) = m_2(0) = 0. \end{aligned}$$

W przeciwnym razie $x > 0$ lub $y > 0$. Załóżmy, że $x > 0$. Wówczas $m_1(x+y) \geqslant m_1(x) > 0$, a zatem dostajemy

$$\begin{aligned} LHS(\mathrm{M}) &= f(m_1(x+y)) = r_2, \\ RHS(\mathrm{M}) &= m_2(f(x) + f(y)) = m_2(r_2 + f(y)) = r_2. \end{aligned}$$

Na koniec rozważmy przypadek (iv), gdy f jest postaci (3.22). Weźmy dowolne $x, y \in [0, r_1]$, $x \geqslant y$, i przeanalizujmy trzy możliwości:

1. $x + y < x_0$. Ponieważ $m_1(x+y) < m_1(x_0)$, zachodzi

$$\begin{aligned} LHS(\mathrm{M}) &= f(m_1(x+y)) = m_2(km_{10}^{-1}(m_1(x+y))) = m_2(k(x+y)), \\ RHS(\mathrm{M}) &= m_2(f(x) + f(y)) = m_2(kx + ky) = m_2(k(x+y)). \end{aligned}$$

2. $x < x_0, x + y \geqslant x_0$. Oczywiście $m_1(x+y) \geqslant m_1(x_0)$, więc

$$LHS(\mathrm{M}) = f(m_1(x+y)) = r_2.$$

Jednocześnie w tym przypadku $k(x+y) = \frac{x_2}{x_0}(x+y) \geqslant x_2$, więc

$$RHS(\mathrm{M}) = m_2(f(x) + f(y)) = m_2(kx + ky) = m_2(k(x+y)) = r_2.$$

3. $x \geqslant x_0$. Wtedy $x + y \geqslant x_0$, a stąd $m_1(x+y) \geqslant m_1(x_0)$ i mamy

$$LHS(\mathrm{M}) = f(m_1(x+y)) = r_2.$$

Jednocześnie w tym przypadku $m_{10}^{-1}(x) \geqslant m_{10}^{-1}(x_0) = y_0$ oraz

$$m_2(km_{10}^{-1}(x)) \geqslant m_2(ky_0) = km_1(y_0) = kx_0 = x_2.$$

Równość $m_2(ky_0) = km_1(y_0)$ wynika z tego, że $km_1(y) = m_2(ky)$ dla wszystkich $y < y_0$ oraz obie funkcje m_1, m_2 są ciągłe. Ponadto

$$m_2(f(x)) = r_2 \Longleftrightarrow f(x) \geqslant x_2 \Longleftrightarrow m_2(km_{10}^{-1}(x)) \geqslant x_2,$$

zatem

$$RHS(\mathrm{M}) = m_2(f(x) + f(y)) \geqslant m_2(f(x)) = r_2.$$

„$\Longrightarrow$”
Wstawiając $x = y = 0$ lub $x = y = r_1$ w (M), otrzymujemy

$$f(0) = f(m_1(0+0)) = m_2(f(0) + f(0)),$$
$$f(r_1) = f(m_1(r_1 + r_1)) = m_2(f(r_1) + f(r_1)).$$

Zatem $f(0), f(r_1) \in \{0, r_2\}$, ponieważ $m_2(2z) > z$ dla wszystkich $z \in (0, r_2)$.

Załóżmy, że $f(0) = r_2$. Wstawiając $y = 0$ w (M), otrzymujemy

$$f(m_1(x)) = f(m_1(x+0)) = m_2(f(x) + f(0)) = m_2(f(x) + r_2) \geqslant m_2(r_2) = r_2,$$

dla wszystkich $x \in [0, r_1]$. Zauważmy, że funkcja m_1 jest ciągła oraz $m_1(0) = 0$, $m_1(2r_1) = r_1$, więc m_1 jest surjektywna, $m_1([0, r_1]) = [0, r_1]$. W ten sposób otrzymaliśmy pierwsze rozwiązanie $f = r_2$.

Jeżeli $f(0) = f(r_1) = 0$, to wstawiając $y = r_1 - x$ w (M), otrzymujemy

$$0 = f(r_1) = f(m_1(r_1)) = f(m_1(x + (r_1 - x))) = m_2(f(x) + f(r_1 - x)),$$

dla wszystkich $x \in [0, r_1]$. Funkcja m_2 przyjmuje wartość 0 tylko dla argumentu równego 0, dlatego

$$f(x) + f(r_1 - x) = 0, \qquad x \in [0, r_1].$$

Ponieważ oba składniki powyższej sumy są nieujemne, otrzymujemy drugie rozwiązanie $f = 0$.

Na koniec rozważmy ostatni przypadek, gdy $f(0) = 0$ oraz $f(r_1) = r_2$. Zdefiniujmy

$$x_0 = \inf\{x \in [0, \infty] : f(x) \geqslant x_2\}.$$

Zauważmy najpierw, że zbiór $\{x \in [0, \infty] : f(x) \geqslant x_2\}$ na pewno nie jest pusty, ponieważ $f(r_1) = r_2 \geqslant x_2$, a zatem x_0 jest dobrze zdefiniowane. Następnie zauważmy, że

$$f(x) \geqslant x_2, \qquad x \in (x_0, r_1],$$

o ile $x_0 < r_1$. Rzeczywiście, weźmy dowolne $x \in (x_0, r_1]$, a dalej takie $x' \in [x_0, x)$, że $f(x') \geqslant x_2$. Liczba x' z pewnością istnieje, zgodnie z definicją x_0 jako infimum. Zachodzi

$$\begin{aligned} m_2(f(x)) &= m_2(f(x) + f(0)) = f(m_1(x+0)) = f(m_1(x' + (x - x'))) \\ &= m_2(f(x') + f(x - x')) \geqslant m_2(f(x')) \geqslant m_2(x_2) = r_2. \end{aligned}$$

Zatem otrzymaliśmy $f(x) \geqslant x_2$.

Jeżeli $x_0 = 0$, to wstawiając $y = 0$ oraz dowolne $x \in (0, r_1]$ w (M), otrzymujemy

$$f(m_1(x+0)) = m_2(f(x) + f(0)) = m_2(f(x)) \geqslant m_2(x_2) = r_2.$$

Zachodzi $m_1((0, r_1]) = (0, r_1]$, dostajemy więc rozwiązanie (2.7):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ r_2, & x > 0, \end{cases} \qquad x \in [0, r_1].$$

W dalszej części dowodu zakładamy, że $x_0 > 0$. Pokażemy, że wówczas zachodzi przypadek (iv), w tym, że funkcja f przyjmuje postać (3.22). Weźmy takie $x, y \in [0, r_1]$, że $x + y < x_0$. Mamy

$$\begin{aligned} m_2(f(x+y)) &= m_2(f(x+y) + f(0)) = f(m_1(x+y)) \\ &= m_2(f(x) + f(y)). \end{aligned}$$

Ponieważ funkcja m_2 jest różnowartościowa na przedziale $[0, x_2)$, a $f(x)$, $f(y)$, $f(x+y) < x_2$, to z ostatniego równania wnioskujemy, że

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \tag{C}$$

dla $x, y \in [0, r_1]$, takich że $x + y < x_0$. Oznacza to, że spełnione jest równanie Cauchy'ego na pewnym rzeczywistym przedziale i z [53, Theorem XIII.6.2] wiemy, że f może być jednoznacznie rozszerzona na $\mathbb{R}$ do funkcji addytywnej. Ponieważ dodatkowo f jest ograniczona, to

$$f(x) = kx, \qquad\qquad x \in [0, x_0),$$

dla pewnej stałej $k \in \mathbb{R}$.

Aby zakończyć dowód twierdzenia 3.24, udowodnimy kolejno, że

A). $k = \frac{x_2}{x_0}$;

B). $f(x) = r_2$ dla $x \in [m_1(x_0), r_1]$;

C). $f(x) = m_2(km_{10}^{-1}(x))$ dla $x \in [0, m_1(x_0))$;

D). $x_0 \leqslant m_1(x_0)$;

E). $km_1(x) = m_2(kx)$ dla $x \in [0, y_0)$.

A). $k = \frac{x_2}{x_0}$.

Rzeczywiście, gdyby $k > \frac{x_2}{x_0}$, to dla pewnego $x \in (0, x_0)$ mielibyśmy $f(x) = kx > x_2$, co jest sprzeczne z definicją x_0. Gdyby zaś $k < \frac{x_2}{x_0}$, to moglibyśmy znaleźć takie $x, y \in (0, x_0)$, że $x + y > x_0$ oraz $k(x + y) < x_2$. W konsekwencji

$$\begin{aligned} r_2 &= m_2(f(x+y)) = m_2(f(x+y) + f(0)) \\ &= f(m_1(x+y)) = m_2(f(x) + f(y)) \\ &= m_2(kx + ky) < r_2, \end{aligned}$$

co ponownie jest sprzecznością.

B). $f(x) = r_2$ dla $x \in [m_1(x_0), r_1]$.

Najpierw zauważmy, że $f(x_0) \geqslant x_2$. Rzeczywiście, gdyby $f(x_0) < x_2$, to równanie Cauchy'ego (C) byłoby spełnione również dla x, y, takich że $x + y = x_0$, i mielibyśmy $f(x) = kx$ dla wszystkich $x \in [0, x_0]$. Wówczas zgodnie z A). zachodziłoby

$$f(x_0) = kx_0 = \frac{x_2}{x_0} x_0 = x_2,$$

co jest sprzeczne z $f(x_0) < x_2$. Niech teraz $x \geqslant x_0$. Stąd $f(x) \geqslant x_2$ oraz

$$r_2 = m_2(f(x)) = f(m_1(x)).$$

Zatem $f([m_1(x_0), r_1]) = \{r_2\}$.

C). $f(x) = m_2(km_{10}^{-1}(x))$ dla wszystkich $x \in [0, m_1(x_0))$.

Niech $x < m_1(x_0)$ i oznaczmy $y = m_{10}^{-1}(x)$. Mamy $y < x_0$ oraz

$$f(x) = f(m_1(y)) = m_2(f(y)) = m_2(ky) = m_2(km_{10}^{-1}(x)).$$

D). $x_0 \leqslant m_1(x_0)$.

Dla dowolnego $x > x_0$ zachodzi

$$f(m_1(x)) = m_2(f(x)) \geqslant m_2(x_2) = r_2 \geqslant x_2.$$

Ponieważ $f(y) \geqslant x_2$ implikuje $y \geqslant x_0$, więc z ostatniego równania wynika, że $m_1(x) \geqslant x_0$. Funkcja m_1 jest ciągła, stąd także $m_1(x_0) \geqslant x_0$.

E). $km_1(x) = m_2(kx)$ dla $x \in [0, y_0)$.

Najpierw zauważmy, że $y_0 \leqslant x_0$, ponieważ z D). $m_1(y_0) = x_0 \leqslant m_1(x_0)$, a funkcja m_1 jest rosnąca. Wstawiając $x < y_0 \leqslant x_0$ oraz $y = 0$ w (M), otrzymujemy

$$km_1(x) = f(m_1(x)) = m_2(f(x)) = m_2(kx),$$

co kończy dowód. □

Uwaga 3.26. Rozwiązanie (3.22) w przypadku (*iv*) w twierdzeniu 3.24 jest ciągłe oraz rosnące.

Dowód. Niech f będzie postaci (3.22) oraz spełnione będą wszystkie warunki z przypadku (*iv*) w twierdzeniu 3.24 Oczywiście wystarczy wykazać ciągłość funkcji f w punkcie $x = m_1(x_0)$. Chcemy zatem udowodnić, że $\lim_{x \to m_1(x_0)^-} f(x) = r_2$. Ponieważ funkcje m_1 oraz m_2 są ciągłe, to prawdziwy jest ciąg równości

$$\begin{aligned}\lim_{x \to m_1(x_0)^-} f(x) &= \lim_{x \to m_1(x_0)^-} m_2(km_{10}^{-1}(x)) = m_2(km_{10}^{-1}(m_1(x_0))) \\ &= m_2(kx_0) = m_2(x_2) = r_2.\end{aligned}$$

Ponadto funkcje m_1, m_2 są rosnące, stąd f jest rosnąca. □

Wniosek 3.27. *Niech $r_1, r_2 \in (0, \infty)$. Dla ciągłej funkcji $f\colon [0, r_1] \to [0, r_2]$ oraz funkcji m_1, m_2 spełniających założenia twierdzenia 3.24 następujące zdania są równoważne:*

(i) Trójka funkcji (m_1, m_2, f) spełnia równanie funkcyjne (M) *dla $x, y \in [0, r_1]$.*

(ii) Zachodzi $f = r_2$ lub $f = 0$, lub zachodzi (iv) z twierdzenia 3.24, w tym f przyjmuje postać (3.22).

Wniosek 3.28. *Możemy otrzymać rozwiązania równania* (2.3)*, tj.*

$$f(\min(x + y, r_1)) = \min(f(x) + f(y), r_2), \qquad x, y \in [0, r_1],$$

przedstawione w twierdzeniu 2.5, jako wniosek z twierdzenia 3.24, wstawiając w nim $m_1 = m_2 = \min$, dokładniej: $m_1(\,\cdot\,) = \min(\,\cdot\,, r_1), m_2(\,\cdot\,) = \min(\,\cdot\,, r_2)$.

Dowód. Pierwsze trzy rozwiązania w twierdzeniu 3.24 nie zależą od konkretnej postaci funkcji m_1 ani m_2, a zatem są dokładnie takie same jak pierwsze trzy rozwiązania w twierdzeniu 2.5. Wystarczy więc przyjrzeć się przypadkowi (*iv*), gdy $m_1(x) = \min(x, r_1)$ dla $x \in [0, 2r_1]$ oraz $m_2 = \min(x, r_2)$ dla $x \in [0, 2r_2]$. Wówczas $x_1 = r_1$, $x_2 = r_2$, $m_1(x_0) = \min(x_0, r_1) = x_0$ oraz $m_{10} = m_1|_{x \leqslant x_1} \colon [0, r_1] \to [0, r_1]$ jest postaci $m_{10}(x) = x$. Zatem

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} m_2(km_{10}^{-1}(x)), & x < m_1(x_0), \\ r_2, & x \geqslant m_1(x_0), \end{cases} \qquad x \in [0, r_1] \\ &= \begin{cases} \min(kx, r_2), & x < x_0, \\ r_2, & x \geqslant x_0, \end{cases} \qquad x \in [0, r_1] \end{aligned}$$

dla pewnego $x_0 \in (0, r_1)$ oraz $k = \frac{x_2}{x_0} = \frac{r_2}{x_0}$. Ponieważ $\min(kx_0, r_2) = \min(r_2, r_2) = r_2$, to

$$f(x) = \min(kx, r_2), \qquad x \in [0, r_1],$$

czyli f jest postaci (2.8). □

Uwaga 3.29. Rozwiązanie (3.22) w (*iv*) w twierdzeniu 3.24 można przedstawić jako minimum

$$f(x) = \min(m_2(km_{10}^{-1}(x)), r_2), \qquad x \in [0, r_1]. \tag{3.23}$$

Dowód. Niech zachodzi (*iv*) z twierdzenia 3.24, w szczególności f jest postaci (3.22), tj.

$$f(x) = \begin{cases} m_2(km_{10}^{-1}(x)), & x < m_1(x_0), \\ r_2, & x \geqslant m_1(x_0), \end{cases} \qquad x \in [0, r_1].$$

Wystarczy wykazać, że $m_2(km_{10}^{-1}(x)) < r_2 \iff x < m_1(x_0)$. Przedstawmy zatem krótki ciąg równoważności

$$\begin{aligned} m_2(km_{10}^{-1}(x)) < r_2 &\iff km_{10}^{-1}(x) < x_2 \\ &\iff m_{10}^{-1}(x) < x_0 \\ &\iff x < m_1(x_0) \end{aligned} \tag{3.24}$$

□

We wniosku 3.28 wykazaliśmy, że jeśli funkcje m_1, m_2 przyjmą postać minimów, dokładniej: $m_1(\,\cdot\,) = \min(\,\cdot\,, r_1), m_2(\,\cdot\,) = \min(\,\cdot\,, r_2)$, to rozwiązanie (3.22) w przypadku (*iv*) w twierdzeniu 3.24 jest postaci (2.8), czyli $f(x) = \min(kx, r_2)$ dla $x \in [0, r_1]$. Możemy zadać pytanie, czy dla innych funkcji m_1, m_2 rozwiązanie to może również przyjąć prostą postać (2.8)? Oraz jakie dodatkowe warunki powinny spełniać funkcje m_1 oraz m_2, aby rozwiązania równania (M) pokrywały się z rozwiązaniami równania (2.3)?

Twierdzenie 3.30. *Niech funkcje m_1, m_2 oraz f spełniają założenia twierdzenia 3.24. Jeżeli zachodzi (iv) z twierdzenia 3.24, w tym f jest postaci* (3.22), *to wówczas prawdziwe są następujące relacje*

$$x_2 = r_2 \iff y_0 = x_0 \implies km_1(x) = m_2(kx), x \in [y_0, x_0) \iff f \text{ jest postaci } (2.8).$$

Dowód. Z uwagi 3.26 funkcja f jest ciągła oraz rosnąca, następnie z ciągłości oraz uwagi 3.25 mamy, że $f(x_0) = kx_0 = x_2$. Jeśli $y_0 = x_0$, to $x_0 = m_1(y_0) = m_1(x_0)$ oraz

$$x_2 = f(x_0) = f(m_1(x_0)) = r_2.$$

W drugą stronę, jeśli $x_2 = r_2$, to $f(x_0) = x_2 = r_2$. Z definicji x_0 mamy $x < x_0 \implies f(x) < x_2 = r_2$, a ponieważ f jest rosnąca, to $x \geqslant x_0 \implies f(x) = r_2$. Te dwie implikacje łączą się w równoważność

$$f(x) < r_2 \iff x < x_0. \tag{3.25}$$

Jednocześnie, korzystając z (3.24) w dowodzie uwagi 3.29, stwierdzamy, że

$$f(x) < r_2 \iff x < m_1(x_0). \tag{3.26}$$

Z (3.25) i (3.26) otrzymujemy, że $x_0 = m_1(x_0)$, a stąd $y_0 = x_0$. W ten sposób skończyliśmy dowód pierwszej równoważności.

Druga implikacja jest oczywista, ponieważ dla $y_0 = x_0$ przedział $[y_0, x_0)$ jest pusty.

Wreszcie, skoro $f(x) = kx$ dla $x < x_0$ oraz $f(x) = r_2$ dla $x \geqslant m_1(x_0)$ niezależnie od tego, czy f jest postaci (3.22), czy (2.8), to

$$\begin{aligned} f \text{ jest postaci (2.8)} &\iff m_2(km_{10}^{-1}(x)) = kx, \quad x \in [x_0, m_1(x_0)) \\ &\iff m_2(km_{10}^{-1}(x)) = km_1(m_{10}^{-1}(x)), \quad m_{10}^{-1}(x) \in [y_0, x_0) \\ &\iff m_2(kx) = km_1(x), \end{aligned}$$

dla $x \in [y_0, x_0)$. Tym samym udowodniliśmy ostatnią równoważność. □

Wykazaliśmy zatem, że możemy rozważyć w równaniu (M) w miejsce minimów całą rodzinę ogólniejszych funkcji m_1 oraz m_2, które spełniają założenia twierdzenia 3.24 oraz jedno dodatkowe założenie, że $x_2 = r_2$, a wówczas rozwiązania równania (M) pozostaną dokładnie takie same jak rozwiązania równania (2.3). Przedstawimy ilustrujący to przykład.

Przykład 3.31. Ustalmy dowolne stałe $r_1, r_2 \in (0, \infty)$ oraz niech

$$\begin{aligned} m_1(x) &= \min(\sqrt{r_1 x}, r_1), \qquad & x \in [0, 2r_1], \\ m_2(x) &= \min(\sqrt{r_2 x}, r_2), \qquad & x \in [0, 2r_2]. \end{aligned}$$

Funkcje m_1, m_2 spełniają założenia twierdzenia 3.24, a zatem znamy dla nich rozwiązania równania (M). Jedyne nietrywialne rozwiązanie $f\colon [0, r_1] \to [0, r_2]$ pojawia się w przypadku *(iv)* i jest postaci (3.22). Ponieważ w tym przypadku $x_2 = r_2$, to zgodnie z twierdzeniem 3.30 mamy

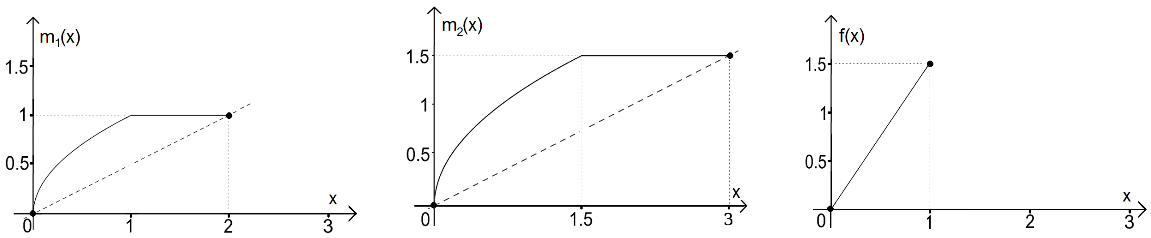
$$f(x) = \min(kx, r_2), \qquad x \in [0, r_1].$$

Znajdziemy wartość stałej k. Dla $x < y_0$ zachodzi $km_1(x) = m_2(kx)$, czyli w tym przypadku

$$k \min(\sqrt{r_1 x}, r_1) = \min(\sqrt{r_2 kx}, r_2).$$

Zatem dla $x < \min(y_0, r_1, r_2/k) = \min(y_0, r_1, x_0) = y_0$ mamy

$$k\sqrt{r_1 x} = \sqrt{r_2 kx},$$



(a) $m_1(x) = \min(\sqrt{x}, 1)$ (b) $m_2(x) = \min(\sqrt{\frac{3}{2}x}, \frac{3}{2})$ (c) $f(x) = \frac{3}{2}x$

Rysunek 3.1: Wykresy funkcji m_1, m_2 oraz f z przykładu 3.31 dla stałych $r_1 = 1, r_2 = \frac{3}{2}$

a stąd $k = r_2/r_1$. Ostatecznie więc

$$f(x) = \min(kx, r_2) = \min(\frac{r_2}{r_1}x, r_2) = \frac{r_2}{r_1}x, \qquad x \in [0, r_1].$$

Wykresy funkcji m_1, m_2 oraz f są przedstawione na rysunku 3.1.

Zaprezentujemy teraz kolejne dwa przykłady zastosowania twierdzenia 3.24 do rozwiązania równania (M) dla różnych par funkcji m_1, m_2. W obu z nich ostatnie rozwiązania będą postaci $f(x) = \min(kx, r_2)$, przy czym w jednym k będzie dowolną stałą z pewnego przedziału, a w drugim k będzie miała jedyną wartość. Przykłady te zilustrują to, że w twierdzeniu 3.30 nie ma równoważności – czyli że rozwiązania mogą być postaci (2.8), mimo że $x_2 \neq r_2$. Oznacza to, że warunek $x_2 = r_2$ nie jest konieczny, aby rozwiązania równania (M) pokrywały się z rozwiązaniami równania (2.3).

Przykład 3.32. Ustalmy dowolne stałe $r_1, r_2 \in (0, \infty)$ oraz $\alpha \geqslant 1$. Niech

$$m_1(x) = \min(\alpha x, r_1), \qquad x \in [0, 2r_1],$$
$$m_2(x) = \min(\alpha x, r_2), \qquad x \in [0, 2r_2].$$

Funkcje m_1, m_2 spełniają założenia twierdzenia 3.24, a zatem znamy rozwiązania równania (M) dla tej pary funkcji. Jedyne nietrywialne rozwiązanie $f\colon [0, r_1] \to [0, r_2]$ pojawia się w przypadku *(iv)* i jest postaci (3.22). Pokażemy, że f spełnia formułę $f(x) = \min(kx, r_2)$ dla $x \in [0, r_1]$, gdzie k może przyjąć dowolną wartość z przedziału $[\frac{r_2}{r_1}, \infty)$.

Zauważmy, że w tym przypadku $x_1 = \frac{r_1}{\alpha}, x_2 = \frac{r_2}{\alpha} \neq r_2$ dla $\alpha \neq 1$ oraz $k = \frac{x_2}{x_0} = \frac{r_2}{\alpha x_0}$. Ponieważ $f(0) = 0$, to z (M) dostajemy $f(m_1(x)) = m_2(f(x))$, czyli

$$f(\min(\alpha x, r_1)) = \min(\alpha f(x), r_2), \qquad x \in [0, r_1]. \tag{3.27}$$

- Niech $x < x_1$. Wtedy $LHS(3.27) = f(\alpha x)$, gdyż $\alpha x < \alpha x_1 = \alpha \frac{r_1}{\alpha} = r_1$.
- Niech $x < x_0$. Wtedy $RHS(3.27) = \min(\alpha k x, r_2) = \alpha k x$, gdyż $\alpha k x = \alpha \frac{r_2}{\alpha x_0} x = \frac{x}{x_0} r_2 < r_2$.

Zatem dla $x < \min(x_0, x_1) = x_0$ otrzymaliśmy $f(\alpha x) = \alpha k x$, co oznacza, że

$$f(x) = kx, \qquad x \in [0, \alpha x_0).$$

Zgodnie z uwagą 3.26 funkcja f jest ciągła i rosnąca, stąd

$$f(\alpha x_0) = k\alpha x_0 = \frac{r_2}{\alpha x_0} \alpha x_0 = r_2$$

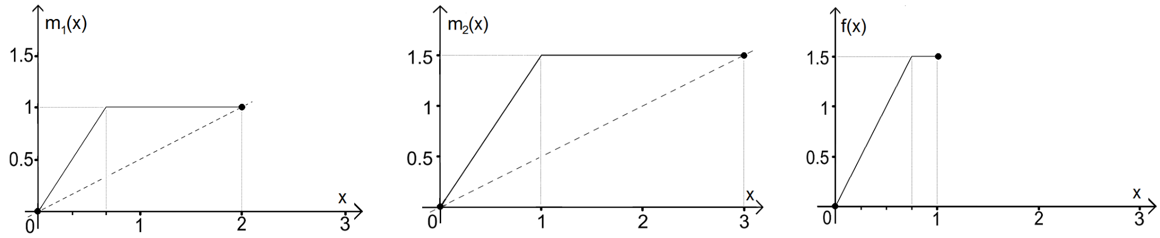
oraz $f([\alpha x_0, r_1]) = \{r_2\}$. W ten sposób otrzymaliśmy

$$f(x) = \min(kx, r_2), \qquad\qquad x \in [0, r_1],$$

gdzie

$$k = \frac{r_2}{\alpha x_0} \geqslant \frac{r_2}{\alpha x_1} = \frac{r_2}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{r_1} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Na rysunku 3.2 przedstawione są wykresy funkcji m_1, m_2 oraz f dla pewnej stałej k wybranej dowolnie z przedziału $[r_2/r_1, \infty)$.



(a) $m_1(x) = \min(\frac{3}{2}x, 1)$ (b) $m_2(x) = \min(\frac{3}{2}x, \frac{3}{2})$ (c) $f(x) = \min(2x, \frac{3}{2})$

Rysunek 3.2: Wykresy funkcji m_1, m_2 oraz f z przykładu 3.32 dla stałych $r_1 = 1, r_2 = \frac{3}{2}, \alpha = \frac{3}{2}$ oraz $k = 2$ (wówczas $k \in [r_2/r_1, \infty) = [\frac{3}{2}, \infty)$)

Przykład 3.33. Ustalmy dowolne stałe $r_1, r_2 \in (0, \infty)$ oraz $\alpha, \beta \geqslant 1$. Niech

$$m_1(x) = \begin{cases} r_1 \sin(\frac{\Pi}{2} \cdot \frac{\alpha}{r_1} \cdot x), & x < \frac{r_1}{\alpha}, \\ r_1, & x \geqslant \frac{r_1}{\alpha}, \end{cases} \qquad x \in [0, 2r_1]$$

$$m_2(x) = \begin{cases} r_2 \sin(\frac{\Pi}{2} \cdot \frac{\beta}{r_2} \cdot x), & x < \frac{r_2}{\beta}, \\ r_2, & x \geqslant \frac{r_2}{\beta}, \end{cases} \qquad x \in [0, 2r_2].$$

Pokażemy, że jedyne nietrywialne rozwiązanie równania (M), które pojawia się w przypadku (iv) twierdzenia 3.24, przyjmuje postać $f(x) = \min(kx, r_2) = kx$ dla $x \in [0, r_1]$, gdzie $k = \frac{r_2}{r_1}$. Ponadto dowiedziemy, że to rozwiązanie może być uzyskane jedynie w przypadku, gdy $\alpha = \beta$.

Zauważmy, że w tym przypadku $x_1 = \frac{r_1}{\alpha}, x_2 = \frac{r_2}{\beta} \neq r_2$ dla $\beta \neq 1$ oraz $k = \frac{x_2}{x_0} = \frac{r_2}{\beta x_0}$. Ponieważ $f(0) = 0$, to z (M) dostajemy

$$f(m_1(x)) = m_2(f(x)), \qquad\qquad x \in [0, r_1]. \tag{3.28}$$

- Niech $x < x_1 = \frac{r_1}{\alpha}$. Wtedy $LHS(3.28) = f(r_1 \sin(\frac{\Pi}{2} \cdot \frac{\alpha}{r_1} \cdot x))$.
- Niech $x < x_0$. Ponieważ $\frac{r_2}{\beta x_0} x < \frac{r_2}{\beta}$, to

$$RHS(3.28) = m_2(kx) = m_2(\frac{r_2}{\beta x_0} x) = r_2 \sin(\frac{\Pi}{2} \cdot \frac{\beta}{r_2} \cdot \frac{r_2}{\beta x_0} x) = r_2 \sin(\frac{\Pi}{2} \cdot \frac{1}{x_0} x).$$

Zatem dla $x < \min(x_0, x_1) = x_0$ otrzymaliśmy

$$f(r_1 \sin(\frac{\Pi}{2} \cdot \frac{\alpha}{r_1} \cdot x)) = r_2 \sin(\frac{\Pi}{2} \cdot \frac{1}{x_0} x). \tag{3.29}$$

Jednocześnie $f(x) = kx$ dla $x < x_0$, a stąd dla $x \in [0, r_1]$, takich że $r_1 \sin(\frac{\Pi}{2} \cdot \frac{\alpha}{r_1} \cdot x) < x_0$ mamy

$$f(r_1 \sin(\frac{\Pi}{2} \cdot \frac{\alpha}{r_1} \cdot x)) = kr_1 \sin(\frac{\Pi}{2} \cdot \frac{\alpha}{r_1} \cdot x). \tag{3.30}$$

Z równań (3.29) oraz (3.30) wnioskujemy, że dla $x < \min(x_0, \frac{2r_1}{\Pi\alpha}\arcsin(\frac{x_0}{r_1}))$ zachodzi

$$\sin(\frac{\Pi}{2}\cdot\frac{1}{x_0}x) = \frac{r_1}{\beta x_0}\sin(\frac{\Pi}{2}\cdot\frac{\alpha}{r_1}\cdot x). \tag{3.31}$$

Rozważmy następujące możliwości

- $x_0 \neq \frac{r_1}{\alpha}$. Wówczas równanie (3.31) przyjmuje postać $\sin(ax) = b\sin(cx)$, gdzie a, b, c są pewnymi stałymi, $a \neq c$. Takie równanie nie może być prawdziwe na żadnym niepustym przedziale.

- $x_0 = \frac{r_1}{\alpha}$ oraz $\alpha \neq \beta$. Wówczas równanie (3.31) przyjmuje postać $\sin(ax) = b\sin(ax)$, gdzie a, b są pewnymi stałymi, $b \neq 1$. Takie równanie również nie może być prawdziwe na żadnym niepustym przedziale.

- $x_0 = \frac{r_1}{\alpha}$ oraz $\alpha = \beta$. Wówczas równanie (3.31) przyjmuje postać $\sin(\frac{\Pi}{2}\frac{1}{x_0}x) = \sin(\frac{\Pi}{2}\frac{1}{x_0}x)$, i jest oczywiście prawdziwe na dowolnym przedziale.

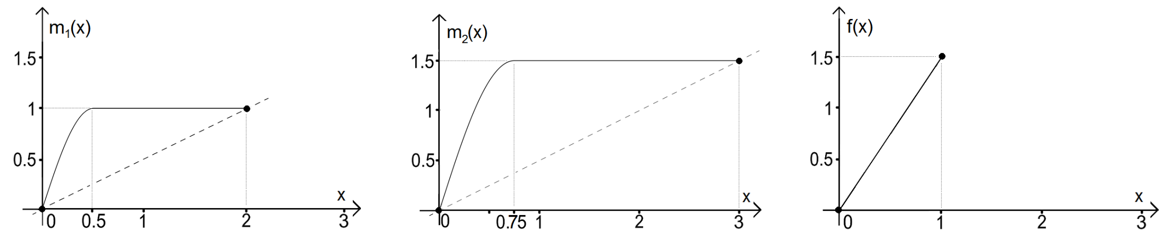
Zatem $x_0 = \frac{r_1}{\alpha}, \alpha = \beta$ oraz $k = \frac{r_2}{r_1}$. Równanie (3.29) przyjmuje postać

$$f(r_1\sin(\frac{\Pi}{2}\frac{1}{x_0}x)) = r_2\sin(\frac{\Pi}{2}\frac{1}{x_0}x) = \frac{r_2}{r_1}\cdot r_1\sin(\frac{\Pi}{2}\frac{1}{x_0}x) = kr_1\sin(\frac{\Pi}{2}\frac{1}{x_0}x), \qquad x < x_0. \tag{3.32}$$

Zgodnie z uwagą 3.26 funkcja f jest ciągła, więc uwzględniając (3.32) oraz to, że

$$r_1\sin(\frac{\Pi}{2}\frac{1}{x_0}x) \ \xrightarrow{x \to x_0^-} \ r_1\sin(\frac{\Pi}{2}) = r_1,$$

ostatecznie otrzymujemy $f(x) = kx = \frac{r_2}{r_1}x$, dla $x \in [0, r_1]$. Na rysunku 3.3 zaprezentowane są wykresy funkcji m_1, m_2 oraz f.



Rysunek 3.3: Wykresy funkcji m_1, m_2 oraz f z przykładu 3.33 dla stałych $r_1 = 1, r_2 = \alpha = \beta = \frac{3}{2}$

W części dotychczasowych przykładów 3.31 - 3.33 zachodziło $x_2 = r_2$, a w części $x_2 < r_2$, czyli funkcja m_2 osiągała po raz pierwszy wartość r_2 czasem w punkcie r_2, a czasem wcześniej. Mimo to za każdym razem ostatnie rozwiązanie przyjmowało postać (2.8), czyli $f(x) = \min(kx, r_2)$ dla $x \in [0, r_1]$, zatem rozwiązania równania (M) pokrywały się z rozwiązaniami równania (2.3). Ostatnim przykładem zilustrujemy, że możemy tak dobrać funkcje m_1, m_2, aby otrzymać również nowe rozwiązania.

Przykład 3.34. Ustalmy dowolne stałe $r \in (0, \infty)$ oraz $\alpha > 1$. Niech $r_1 = r_2 = r$ oraz

$$m_1(x) = \begin{cases} \alpha x, & x < \frac{r}{2\alpha}, \\ \frac{\alpha x + r(\alpha-1)}{2\alpha-1}, & x \in [\frac{r}{2\alpha}, r), \\ r, & x \geqslant r, \end{cases}$$

$$m_2(x) = \min(\alpha x, r).$$

dla $x \in [0, 2r]$. W przypadku (iv) twierdzenia 3.24 mamy $x_1 = r$, $x_2 = \frac{r}{\alpha}$ oraz $k = \frac{x_2}{x_0} = \frac{r}{\alpha x_0}$. Następnie $m_{10}\colon [0,r] \to [0,r]$ i m_{10}^{-1} spełnia wzór

$$m_{10}^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{\alpha}, & x < \frac{r}{2}, \\ \frac{(2\alpha-1)x - r(\alpha-1)}{\alpha}, & x \geqslant \frac{r}{2}, \end{cases} \qquad x \in [0,r],$$

a jedyne nietrywialne rozwiązanie równania (M), które pojawia się właśnie w tym przypadku, zgodnie z uwagą 3.29 przyjmuje postać (3.23). Zatem dla $x \in [0, r_1]$ mamy

$$\begin{aligned} f(x) &= \min(m_2(km_{10}^{-1}(x)), r) \\ &= \min(\min(\alpha k m_{10}^{-1}(x), r), r) = \min(\frac{r m_{10}^{-1}(x)}{x_0}, r) \\ &= \begin{cases} r\min(\frac{x}{\alpha x_0}, 1), & x < \frac{r}{2}, \\ r\min(\frac{(2\alpha-1)x - r(\alpha-1)}{\alpha x_0}, 1), & x \geqslant \frac{r}{2}. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.33}$$

Ponadto dla $x < y_0 \leqslant x_0$ mamy $kx = \frac{x_2}{x_0}x < x_2$ oraz

$$km_1(x) = m_2(kx) = \alpha k x,$$

a zatem $m_1(x) = \alpha x$ dla $x < y_0$. Żeby ten warunek był spełniony, musi zachodzić $y_0 \leqslant \frac{r}{2\alpha}$, co implikuje $x_0 = m_1(y_0) \leqslant m_1(\frac{r}{2\alpha}) = \alpha \cdot \frac{r}{2\alpha} = \frac{r}{2}$. Zatem trójka funkcji (m_1, m_2, f), gdzie f jest określona wzorem (3.33) dla $x_0 \in (0, \frac{r}{2}]$, spełnia równanie (M).

Na koniec zauważmy, że jeżeli $f(\frac{r}{2}) = r$, to funkcja f jest postaci (2.8), mianowicie

$$f(x) = \min(\frac{rx}{\alpha x_0}, r), \qquad x \in [0,r].$$

Jeśli natomiast $f(\frac{r}{2}) < r$, to

$$f(x) = \begin{cases} \frac{rx}{\alpha x_0}, & x < \frac{r}{2}. \\ \frac{r}{\alpha x_0}((2\alpha-1)x - r(\alpha-1)), & x \in [\frac{r}{2}, \frac{\alpha x_0 + r(\alpha-1)}{2\alpha-1}). \\ r, & x \geqslant \frac{\alpha x_0 + r(\alpha-1)}{2\alpha-1}. \end{cases} \qquad x \in [0,r], \tag{3.34}$$

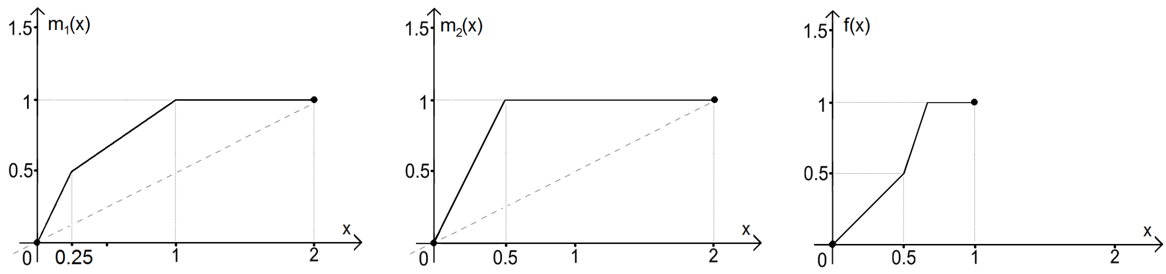
przy czym zachodzi

$$f(\frac{r}{2}) = r\min(\frac{r}{2\alpha x_0}, 1) < r \iff \frac{r}{2\alpha x_0} < 1 \iff x_0 > \frac{r}{2\alpha}.$$

Zatem dla $x_0 \in (\frac{r}{2\alpha}, \frac{r}{2}]$ funkcja f przyjmuje postać (3.34) różną od (2.8). Jest to więc całkiem nowe rozwiązanie, różne od rozwiązań równania (2.3). Na rysunku 3.4 przedstawione są wykresy funkcji m_1, m_2 oraz f dla pewnej stałej x_0 wybranej dowolnie z przedziału $(\frac{r}{2\alpha}, \frac{r}{2}]$.

3.2.2 Uogólnienie równania $f(x+y) = \min(f(x) + f(y), r_2)$

W niniejszym podrozdziale wiele dowodów twierdzeń przebiega analogicznie do dowodów twierdzeń z poprzedniego Podrozdziału 3.2.1. Dlatego większość z nich tutaj pomijamy lub też przedstawiamy tylko te ich fragmenty, które są istotnie różne. Pełne wersje tych dowodów umieszczone są w pracy [22].



Rysunek 3.4: Wykresy funkcji m_1, m_2 oraz f z przykładu 3.34 dla stałych $r = 1, \alpha = 2$ oraz $x_0 = \frac{1}{2}$ (wówczas $x_0 \in (\frac{r}{2\alpha}, \frac{r}{2}] = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$)

Twierdzenie 3.35. *Niech $r_2 \in (0, \infty)$ oraz $m_2 \colon [0, 2r_2] \to [0, r_2]$ będzie ciągłą funkcją, ściśle rosnącą na pewnym przedziale $[0, x_2]$, gdzie $x_2 \leqslant r_2$, a następnie stale równą r_2. Ponadto niech $m_2(0) = 0$ oraz $2m_2(x) > x$ dla $x \in (0, 2r_2)$. Wreszcie, niech $m_1 \colon [0, \infty] \to [0, \infty]$ będzie dowolną ciągłą i różnowartościową funkcją, taką że $m_1(0) = 0$, $m_1(\infty) = \infty$ oraz $2m_1(x) > x$ dla wszystkich $x \in (0, \infty)$.*
Wówczas dla dowolnej funkcji $f \colon [0, \infty] \to [0, r_2]$ trójka funkcji (m_1, m_2, f) spełnia równanie (M) *dla $x, y \in [0, \infty]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jedna z poniższych możliwości:*

(i) $f = \infty$;

(ii) $f = 0$;

(iii) f *przyjmuje postać* (2.7), *tj.*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ r_2, & x > 0, \end{cases} \qquad x \in [0, \infty];$$

(iv) f *przyjmuje postać* (2.9), *tj.*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < \infty, \\ r_2, & x = \infty, \end{cases} \qquad x \in [0, \infty];$$

(v) istnieje takie $x_0 \in (0, \infty)$, że f przyjmuje postać (3.22), *tj.*

$$f(x) = \begin{cases} m_2(k m_1^{-1}(x)), & x < m_1(x_0), \\ r_2, & x \geqslant m_1(x_0), \end{cases}$$

dla $x \in [0, \infty]$ i $k = \frac{x_2}{x_0}$. Ponadto w tym przypadku $x_0 \leqslant m_1(x_0)$ i

$$k m_1(x) = m_2(kx),$$

dla $x < y_0$, gdzie $y_0 = m_1^{-1}(x_0)$.

Uwaga 3.36. Zauważmy, że jeśli zachodzi przypadek (v) z twierdzenia 3.35, to

$$f(x) = kx, \qquad x < x_0,$$

ponieważ

$$\begin{aligned} x < x_0 &\Longrightarrow m_1^{-1}(x) < y_0 \text{ oraz } x < m_1(x_0) \\ &\Longrightarrow f(x) = m_2(k m_1^{-1}(x)) = k m_1(m_1^{-1}(x)) = kx. \end{aligned}$$

Dowód twierdzenia 3.35.

Dowód tego twierdzenia przebiega niemal identycznie do dowodu twierdzenia 3.24, z jednym tylko wyjątkiem. Pominiemy zatem jego większość, a przedstawimy tutaj tylko ten istotnie różny fragment. Dotyczy on implikacji „$\Longrightarrow$”, przypadku, gdy $f(0) = 0$, $f(\infty) = r_2$ oraz $x_0 > 0$. Analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 3.24 uzyskujemy, że wówczas

$$f(x) = kx, \qquad\qquad x \in [0, x_0),$$

dla pewnej stałej $k \in \mathbb{R}$. Ponieważ dla wszystkich $x \in [0, \infty]$ zachodzi $f(x) \in [0, r_2]$, więc w szczególnościci

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} kx = kx_0 \leqslant r_2.$$

Jeżeli $x_0 = \infty$ (nie było takiej możliwości w twierdzeniu 3.24, gdzie D_f, a zatem i x_0 były na pewno skończone), to $k \cdot \infty \leqslant r_2$ pociąga za sobą $k = 0$ i uzyskujemy brakujące rozwiązanie (2.9):

$$f(x) = \begin{cases} 0 \cdot x = 0, & x < x_0 = \infty, \\ r_2, & x = \infty, \end{cases} \qquad\qquad x \in [0, \infty].$$

□

Dowody kolejnych dwóch wniosków 3.37 i 3.38, uwagi 3.39 oraz twierdzenia 3.40 są podobne do odpowiadających im wniosków 3.27, 3.28, uwagi 3.29 oraz twierdzenia 3.30 z poprzedniego podrozdziału, dlatego w całości je tutaj pomijamy.

Wniosek 3.37. *Niech $r_2 \in (0, \infty)$. Dla ciągłej funkcji $f\colon [0, \infty] \to [0, r_2]$ oraz funkcji m_1, m_2 spełniających założenia twierdzenia 3.35 następujące zdania są równoważne:*

(i) Trójka funkcji (m_1, m_2, f) spełnia równanie funkcyjne (M) *dla $x, y \in [0, \infty]$.*

(ii) Zachodzi $f = \infty$ lub $f = 0$, lub zachodzi (v) z twierdzenia 3.35, w tym f przyjmuje postać (3.22).

Wniosek 3.38. *Możemy otrzymać rozwiązania równania funkcyjnego* (2.4)*, tj.*

$$f(x + y) = \min(f(x) + f(y), r_2), \qquad\qquad x, y \in [0, \infty],$$

przedstawione w twierdzeniu 2.6, jako wniosek z twierdzenia 3.35, wstawiając w nim $m_1 = Id$ oraz $m_2 = \min$, dokładniej: $m_2(\,\cdot\,) = \min(\,\cdot\,, r_2)$.

Uwaga 3.39. Rozwiązanie (3.22) w (v) w twierdzeniu 3.35 można przedstawić jako minimum

$$f(x) = \min(m_2(km_1^{-1}(x)), r_2), \qquad\qquad x \in [0, \infty].$$

Twierdzenie 3.40. *Niech funkcje m_1, m_2 oraz f spełniają założenia twierdzenia 3.35. Jeżeli zachodzi (v) z twierdzenia 3.35, w tym f jest postaci* (3.22)*, to wówczas prawdziwe są następujące relacje*

$$x_2 = r_2 \iff y_0 = x_0 \implies km_1(x) = m_2(kx), x \in [y_0, x_0) \iff f \text{ jest postaci } (2.8).$$

Przedstawimy teraz dwa przykłady zastosowania twierdzenia 3.35 do znalezienia wszystkich rozwiązań równania (M) dla różnych par funkcji m_1, m_2. Ponieważ pierwsze cztery rozwiązania w wypowiedzi twierdzenia 3.35 są trywialne i nie zależą od m_1 ani m_2, będziemy zajmować się jedynie ostatnim (3.22), próbując znaleźć jego prostą i elegancką postać. Pierwszy przykład jest podobny do przykładu 3.31 z poprzedniego podrozdziału i rozwiązanie, funkcja f, także tutaj przyjmuje postać (2.8), $f(x) = \min(kx, r_2)$. Chcemy jednak podkreślić, że możliwe są również rozwiązania innej postaci, wychodzące poza zbiór rozwiązań uogólnianego w tym podrozdziale równania $f(\min(x+y, r_1)) = \min(f(x)+f(y), r_2)$. Żeby tak się stało, zgodnie z twierdzeniem 3.40 musi istnieć $x \in [y_0, x_0)$ taki, że $km_1(x) \neq m_2(kx)$. W drugim przykładzie zmodyfikujemy w tym celu odpowiednio wzory na funkcje m_1 i m_2.

Przykład 3.41. Ustalmy stałe $a, r_2 \in (0, \infty)$ i niech

$$m_1(x) = \max(\sqrt{ax}, x), \qquad x \in [0, \infty],$$
$$m_2(x) = \min(\sqrt{r_2 x}, r_2), \qquad x \in [0, 2r_2].$$

Zauważmy, że $x_2 = r_2$, a zatem z twierdzenia 3.40 funkcja f przyjmuje postać (2.8), $f(x) = \min(kx, r_2)$ dla $x \in [0, \infty]$. Wskażemy dokładną wartość stałej k.

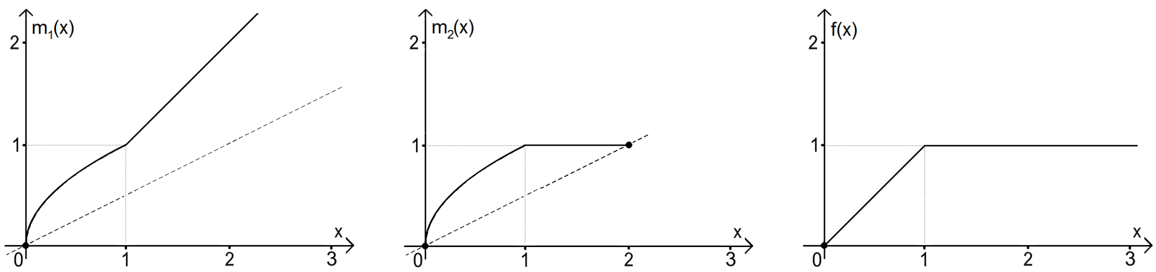
Dla $x < y_0$ zachodzi $km_1(x) = m_2(kx)$, czyli

$$k \max(\sqrt{ax}, x) = \min(\sqrt{kr_2x}, r_2).$$

Zatem dla $x < \min(y_0, a, r_2/k)$ mamy

$$k\sqrt{ax} = \sqrt{kr_2x},$$

a stąd $k = \frac{r_2}{a}$, i ostatecznie $f(x) = \min(\frac{r_2}{a}x, r_2)$ dla wszystkich $x \in [0, \infty]$. Wykresy funkcji m_1, m_2 oraz f są przedstawione na rysunku 3.5.



(a) $m_1(x) = \max(\sqrt{x}, x)$ (b) $m_2(x) = \min(\sqrt{x}, x)$ (c) $f(x) = \min(x, 1)$

Rysunek 3.5: Wykresy funkcji m_1, m_2 oraz f z przykładu 3.41 dla stałych $a = r_2 = 1$.

Przykład 3.42. Ustalmy stałe $a, c, r_2 \in (0, \infty)$, gdzie $c > r_2$, i niech

$$m_1(x) = \max(\frac{c}{r_2}\sqrt{ax}, \frac{c^2}{r_2^2}x), \qquad x \in [0, \infty],$$
$$m_2(x) = \min(\sqrt{cx}, r_2), \qquad x \in [0, 2r_2].$$

Zauważmy, że $x_2 = \frac{r_2^2}{c} < r_2$, więc nie możemy wzorem poprzedniego przykładu skorzystać bezpośrednio z twierdzenia 3.40.

Dla $x < y_0$ zachodzi $km_1(x) = m_2(kx)$, dlatego dla $x < \min(y_0, a\frac{r_2^2}{c^2}, \frac{r_2^2}{c})$ mamy

$$k\frac{c}{r_2}\sqrt{ax} = \sqrt{ckx},$$

a stąd $k = \frac{r_2^2}{ac}$. Ponieważ jednocześnie $k = \frac{x_2}{x_0} = \frac{r_2^2}{cx_0}$, to $x_0 = a$ oraz $f(x) = kx = \frac{r_2^2}{ac}x$ dla $x < a$. Ponadto $m_1(x_0) = m_1(a) = \frac{c^2}{r_2^2}a$, więc $f(x) = r_2$ dla $x \geqslant \frac{c^2}{r_2^2}a$. Na pozostałym przedziale, dla $x \in [x_0, m_1(x_0)) = [a, \frac{c^2}{r_2^2}a)$, zachodzi $m_1^{-1}(x) = \frac{r_2^2}{c^2}x$ oraz

$$f(x) = m_2(km_1^{-1}(x)) = m_2(\frac{r_2^2}{ac}\cdot\frac{r_2^2}{c^2}x) = \sqrt{c\cdot\frac{r_2^4}{ac^3}x} = \frac{r_2^2}{c\sqrt{a}}\sqrt{x}.$$

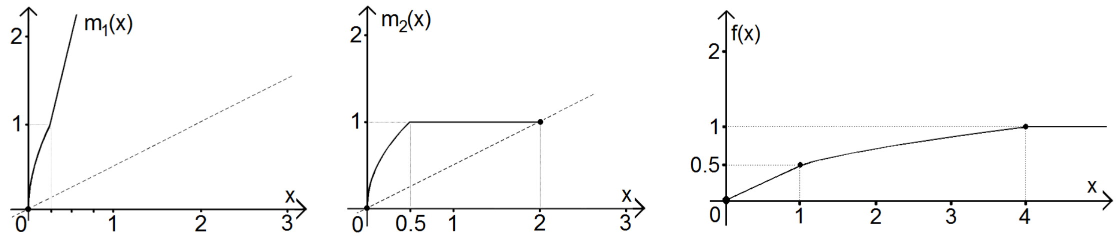
Trzecia równość wynika z tego, że

$$\frac{r_2^4}{ac^3}x < \frac{r_2^4}{ac^3}\cdot\frac{c^2}{r_2^2}a = \frac{r_2^2}{c} = x_2.$$

Ostatecznie więc otrzymaliśmy

$$f(x) = \begin{cases} \frac{r_2^2}{ca}x, & x < a, \\ \frac{r_2^2}{c\sqrt{a}}\sqrt{x}, & x \in [a, \frac{c^2}{r_2^2}a), \\ r_2, & x \geqslant \frac{c^2}{r_2^2}a, \end{cases} \qquad x \in [0, \infty].$$

Oczywiście $f(x) \neq \min(kx, r_2)$ na przedziale $[a, \frac{c^2}{r_2^2}a)$, funkcja f nie jest zatem postaci (2.8). Na rysunku 3.6 przedstawione są wykresy funkcji m_1, m_2 oraz f.



Rysunek 3.6: Wykresy funkcji m_1, m_2 oraz f z przykładu 3.42 dla stałych $a = r_2 = 1$ oraz $c = 2$

3.2.3 Uogólnienie równania $f(\min(x + y, r_1)) = f(x) + f(y)$

Dowód twierdzenia 3.43 charakteryzującego rozwiązania równania (M), gdy $r_1 < \infty$, $r_2 = \infty$, jest fragmentami analogiczny do dowodów twierdzeń 3.24 i 3.35 z poprzednich podrozdziałów. Jednak różni się od nich na tyle znacząco, że wydaje się celowe umieścić go w tej pracy w całości.

Twierdzenie 3.43. *Niech $r_1 \in (0, \infty)$ oraz $m_1\colon [0, 2r_1] \to [0, r_1]$ będzie ciągłą funkcją, ściśle rosnącą na pewnym przedziale $[0, x_1]$, gdzie $x_1 \leqslant r_1$, a następnie stale równą r_1. Ponadto niech $m_1(0) = 0$ oraz $2m_1(x) > x$ dla $x \in (0, 2r_1)$. Wreszcie, niech $m_2\colon [0, \infty] \to [0, \infty]$ będzie dowolną funkcją, taką że m_2 spełnia $m_2(0) = 0$, $m_2(\infty) = \infty$ oraz*

$$2m_2(x) > x, \qquad m_2(x) < \infty, \qquad x \in (0, \infty).$$

Wówczas dla dowolnej funkcji $f\colon [0, r_1] \to [0, \infty]$ trójka funkcji (m_1, m_2, f) spełnia równanie (M) dla $x, y \in [0, r_1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jedna z poniższych możliwości:

(i) $f = \infty$*;*

(ii) $f = 0$*;*

(iii) f *przyjmuje postać* (2.10)*, tj.*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \infty, & x > 0, \end{cases} \qquad x \in [0, r_1].$$

Dowód. „$\Longleftarrow$"
Oczywiście jeśli $f = 0$ lub $f = \infty$, to równanie (M) jest spełnione, jeśli tylko $m_2(0) = 0$ oraz $m_2(\infty) = \infty$. Niech f będzie postaci (2.10). Wstawiając $x = y = 0$ do (M), otrzymujemy

$$\begin{aligned} RHS(\mathrm{M}) &= m_2(f(0) + f(0)) = m_2(0) = 0, \\ LHS(\mathrm{M}) &= f(m_1(0 + 0)) = f(0) = 0. \end{aligned}$$

W przeciwnym razie $x > 0$ lub $y > 0$. Załóżmy, że $x > 0$ i wtedy dostajemy

$$\begin{aligned} RHS(\mathrm{M}) &= m_2(f(x) + f(y)) = m_2(\infty + f(y)) = \infty, \\ LHS(\mathrm{M}) &= f(m_1(x + y)) = \infty, \end{aligned}$$

ponieważ $m_1(x + y) \geqslant m_1(x) > 0$ dla $x > 0$.
„$\Longrightarrow$"
Wstawiając $x = y = 0$ lub $x = y = r_1$ w (M), otrzymujemy

$$\begin{aligned} f(0) &= f(m_1(0 + 0)) = m_2(f(0) + f(0)), \\ f(r_1) &= f(m_1(r_1 + r_1)) = m_2(f(r_1) + f(r_1)). \end{aligned}$$

Zatem $f(0), f(r_1) \in \{0, \infty\}$, ponieważ $m_2(2z) > z$ dla $z \in (0, \infty)$.

Załóżmy, że $f(0) = \infty$. Wstawiając $y = 0$ w (M), otrzymujemy

$$\begin{aligned} f(m_1(x)) &= f(m_1(x + 0)) = m_2(f(x) + f(0)) \\ &= m_2(f(x) + \infty) = m_2(\infty) = \infty, \end{aligned}$$

dla wszystkich $x \in [0, r_1]$. Zachodzi $m_1([0, r_1]) = [0, r_1]$, ponieważ $m_1(0) = 0, m_1(r_1) = r_1$ oraz m_1 jest ciągła, a zatem dostajemy pierwsze rozwiązanie $f = \infty$.

Jeżeli $f(0) = f(r_1) = 0$, to wstawiając $y = r_1 - x$ w (M), otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 = f(r_1) = f(m_1(r_1)) &= f(m_1(x + (r_1 - x))) \\ &= m_2(f(x) + f(r_1 - x)), \end{aligned}$$

dla wszystkich $x \in [0, r_1]$. Funkcja m_2 przyjmuje wartość 0 tylko dla argumentu równego 0, dlatego

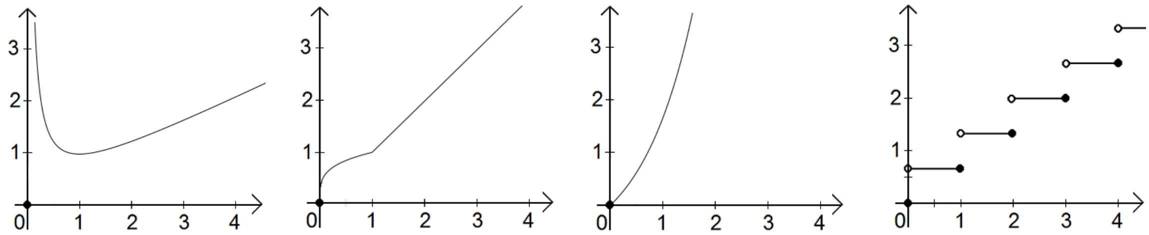
$$f(x) + f(r_1 - x) = 0, \qquad x \in [0, r_1].$$

Ponieważ oba składniki powyższej sumy są nieujemne, otrzymujemy drugie rozwiązanie $f = 0$.

Na koniec rozważmy ostatni przypadek, gdy $f(0) = 0$ oraz $f(r_1) = \infty$. Zdefiniujmy

$$x_0 = \inf\{x \in [0, r_1] : f(x) = \infty\}.$$

Zauważmy, że zbiór $\{x \in [0, r_1] : f(x) = \infty\}$ na pewno nie jest pusty, ponieważ $f(r_1) = \infty$, a zatem x_0 jest dobrze zdefiniowane. Udowodnimy kolejno, że



(a) $m_2(0) = 0$ oraz $m_2(x) = \frac{x^2+1}{2x}$, $x > 0$ (b) $m_2(x) = \max(x^a, x)$ (dla $a = \frac{1}{4}$) (c) $m_2(x) = e^x - 1$ (d) $m_2(x) = k \cdot \lceil x \rceil$ (dla $k = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$)

Rysunek 3.7: Wykresy różnych funkcji $m_2\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$ spełniających założenia twierdzenia 3.43

A). $x_0 < r_1$;

B). $f(x) = \infty$ dla $x \in (x_0, r_1]$;

C). $x_0 = 0$.

A). $x_0 < r_1$. Załóżmy przeciwnie, że $x_0 = r_1$ i wstawmy $x = y = \frac{3}{4}r_1$ w (M), wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned} LHS(\text{M}) &= f(m_1(\frac{3}{4}r_1 + \frac{3}{4}r_1)) = f(r_1) = \infty, \\ RHS(\text{M}) &= m_2(f(\frac{3}{4}r_1) + f(\frac{3}{4}r_1)) < \infty, \end{aligned}$$

gdyż $f(\frac{3}{4}r_1) < \infty$. Sprzeczność.

B). $f(x) = \infty$ dla $x \in (x_0, r_1]$. Niech $x \in (x_0, r_1]$ oraz niech takie $x' \in [x_0, x)$, że $f(x') = \infty$. Liczba x' z pewnością istnieje, zgodnie z definicją x_0 jako infimum. Zachodzi

$$\begin{aligned} m_2(f(x)) &= m_2(f(x) + f(0)) = f(m_1(x + 0)) = f(m_1(x' + (x - x'))) \\ &= m_2(f(x') + f(x - x')) = m_2(\infty + f(x - x')) = \infty. \end{aligned}$$

Zatem otrzymaliśmy $f(x) = \infty$.

C). $x_0 = 0$. Załóżmy przeciwnie, że $x_0 > 0$ i wstawmy $x = y = \frac{3}{4}x_0 > 0$ w (M), wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned} \infty > m_2(f(\frac{3}{4}x_0) + f(\frac{3}{4}x_0)) &= f(m_1(\frac{3}{4}x_0 + \frac{3}{4}x_0)) \\ &= f(m_1(\frac{3}{2}x_0 + 0)) = m_2(f(\frac{3}{2}x_0) + f(0)) \\ &= m_2(\infty + 0) = \infty, \end{aligned}$$

sprzeczność.

W ten sposób uzyskaliśmy ostatnie rozwiązanie (2.10). $\square$

Wniosek 3.44. *Niech $r_1 \in (0,\infty)$. Dla ciągłej funkcji $f\colon [0, r_1] \to [0,\infty]$ oraz funkcji m_1, m_2 spełniających założenia twierdzenia 3.43 następujące zdania są równoważne:*

(i) Trójka funkcji (m_1, m_2, f) spełnia równanie funkcyjne (M) dla $x, y \in [0, r_1]$.

(ii) Zachodzi $f = r_2$ lub $f = \infty$.

Wniosek 3.45. *Możemy otrzymać rozwiązania równania funkcyjnego* (2.5)*, tj.*

$$f(\min(x+y, r_1)) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in [0, r_1],$$

przedstawione w twierdzeniu 2.7, jako wniosek z twierdzenia 3.43, wstawiając w nim $m_1 = \min$, dokładniej $m_1(\,\cdot\,) = \min(\,\cdot\,, r_1)$, oraz $m_2 = Id$.

Dowód tego wniosku jest analogiczny do dowodu wniosku 3.28, dlatego tutaj go pomijamy.

Zwróćmy uwagę, że żadne z rozwiązań wymienionych w twierdzeniu 3.43 nie zależy od konkretnej postaci funkcji m_1 ani m_2. Oznacza to, że jeśli w miejsce funkcji minimum wstawimy do równania (2.5) dowolną funkcję $m_1\colon [0, 2r_1] \to [0, r_1]$ spełniającą założenia twierdzenia 3.43 (na przykład którąś z funkcji m_1 z przykładów 3.31, 3.32, 3.33, 3.34) oraz w miejsce identyczności dowolną funkcję $m_2\colon [0, \infty] \to [0, \infty]$ także spełniającą założenia twierdzenia 3.43, to zawsze dostaniemy te same rozwiązania co w uogólnianym twierdzeniu 2.7. Przykładowe funkcje m_2 przedstawione są na rysunku 3.7.

Rozdział 4

O równaniach rozdzielności dla rozkładalnych uninorm

W tym rozdziale zajmiemy się scharakteryzowaniem rozwiązań następujących dwóch równań rozdzielności:

$$\mathcal{I}(x, \mathcal{U}_1(y,z)) = \mathcal{U}_2(\mathcal{I}(x,y), \mathcal{I}(x,z)), \qquad x,y,z \in L^I, \tag{D-UU1}$$

$$\mathcal{I}(\mathcal{U}_1(x,y), z) = \mathcal{U}_2(\mathcal{I}(x,z), \mathcal{I}(y,z)), \qquad x,y,z \in L^I, \tag{D-UU2}$$

gdzie $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ są danymi *rozkładalnymi uninormami* na $\mathcal{L}^I$, a $\mathcal{I}\colon (\mathcal{L}^I)^2 \to \mathcal{L}^I$ jest nieznaną funkcją. Rozważymy te przypadki, w których obie uninormy $\mathcal{U}_1$ oraz $\mathcal{U}_2$ generowane są przez dwie jednakowe uninormy reprezentowalne, a zatem zgodnie z lematem 1.49 $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ są koniunkcyjne lub alternatywne. Wszystkie prezentowane tutaj wyniki zostały uzyskane przez Autorkę we współpracy z M. Baczyńskim w latach 2014-2015, a część z nich została już opublikowana w [20].

Najpierw pokażemy, jak oba równania (D-UU1), (D-UU2) można przekształcić do równania funkcyjnego

$$f(u_1+v_1, u_2+v_2) = f(u_1,u_2) + f(v_1,v_2), \qquad (u_1,u_2),(v_1,v_2) \in L^{\overline{\infty}}, \tag{F}$$

gdzie $L^{\overline{\infty}} = \{(x_1,x_2) \in [-\infty,\infty]^2 \mid x_1 \leqslant x_2\}$. W podrozdziale 4.2 przedyskutujemy rozwiązania równania (F) dla wszystkich kombinacji założeń $(A-)/(A+)$ na dziedzinie i przeciwdziedzinie funkcji f. Natomiast w podrozdziale 4.3 scharakteryzujemy funkcje $\mathcal{I}$ będące rozwiązaniami równań rozdzielności (D-UU1) oraz (D-UU2), a także wskażemy wśród nich implikacje rozmyte. Ze wszystkimi szczegółami przedstawimy tylko jeden przypadek — rozwiązania równania (D-UU1), gdy każda z $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ generowana jest przez dwie jednakowe koniunkcyjne uninormy reprezentowalne. Analogicznie można uzyskać rozwiązania obu równań rozdzielności, jeśli każda z $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ generowana jest przez dwie jednakowe uninormy reprezentowalne — czy to koniunkcyjne, czy to alternatywne. W tych pozostałych przypadkach zaprezentujemy jedynie wyniki, bez powtarzania podobnych dowodów. Najpierw zauważmy, że niektórych sytuacji nie trzeba wcale rozważać, gdyż nie generują żadnych rozwiązań $\mathcal{I}$.

Lemat 4.1. *Niech funkcja* $\mathcal{I}\colon (\mathcal{L}^I)^2 \to \mathcal{L}^I$ *spełnia* (I3) *oraz równanie* (D-UU1) *z pewnymi uninormami* $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ *na* $\mathcal{L}^I$. *Wówczas* $\mathcal{U}_1$ *jest koniunkcyjna wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathcal{U}_2$ *jest koniunkcyjna, a* $\mathcal{U}_1$ *jest alternatywna wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathcal{U}_2$ *jest alternatywna.*

Dowód. Wstawiając $x = y = 1_{\mathcal{L}^I}$ oraz $z = 0_{\mathcal{L}^I}$ do (D-UU1), otrzymujemy

$$\mathcal{I}(1_{\mathcal{L}^I}, \mathcal{U}_1(1_{\mathcal{L}^I}, 0_{\mathcal{L}^I})) = \mathcal{U}_2(\mathcal{I}(1_{\mathcal{L}^I}, 1_{\mathcal{L}^I}), \mathcal{I}(1_{\mathcal{L}^I}, 0_{\mathcal{L}^I})).$$

Jeżeli $\mathcal{U}_1$ jest koniunkcyjna, to $\mathcal{U}_1(1_{\mathcal{L}^I}, 0_{\mathcal{L}^I}) = 0_{\mathcal{L}^I}$ i dzięki (I3) mamy $0_{\mathcal{L}^I} = \mathcal{U}_2(1_{\mathcal{L}^I}, 0_{\mathcal{L}^I})$, czyli $\mathcal{U}_2$ jest także koniunkcyjną uninormą. Jeśli natomiast $\mathcal{U}_1$ jest alternatywna, to $\mathcal{U}_1(1_{\mathcal{L}^I}, 0_{\mathcal{L}^I}) = 1_{\mathcal{L}^I}$ i dzięki (I3) mamy $1_{\mathcal{L}^I} = \mathcal{U}_2(1_{\mathcal{L}^I}, 0_{\mathcal{L}^I})$, czyli $\mathcal{U}_2$ także jest alternatywna. □

Lemat 4.2. *Niech funkcja* $\mathcal{I}\colon (\mathcal{L}^I)^2 \to \mathcal{L}^I$ *spełnia* (I3) *oraz równanie* (D-UU2) *z pewnymi uninormami* $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ *na* $\mathcal{L}^I$. *Wówczas* $\mathcal{U}_1$ *jest koniunkcyjna wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathcal{U}_2$ *jest alternatywna oraz* $\mathcal{U}_1$ *jest alternatywna wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathcal{U}_2$ *jest koniunkcyjna.*

Dowód. Wstawiając $x = z = 0_{\mathcal{L}^I}$ oraz $y = 1_{\mathcal{L}^I}$ w (D-UU2), dostajemy

$$\mathcal{I}(\mathcal{U}_1(0_{\mathcal{L}^I}, 1_{\mathcal{L}^I}), 0_{\mathcal{L}^I}) = \mathcal{U}_2(\mathcal{I}(0_{\mathcal{L}^I}, 0_{\mathcal{L}^I}), \mathcal{I}(1_{\mathcal{L}^I}, 0_{\mathcal{L}^I})).$$

Jeżeli $\mathcal{U}_1$ jest koniunkcyjna, to $\mathcal{U}_1(1_{\mathcal{L}^I}, 0_{\mathcal{L}^I}) = 0_{\mathcal{L}^I}$ i dzięki (I3) mamy $1_{\mathcal{L}^I} = \mathcal{U}_2(1_{\mathcal{L}^I}, 0_{\mathcal{L}^I})$, co oznacza, że $\mathcal{U}_2$ jest alternatywna. Jeśli natomiast $\mathcal{U}_1$ jest alternatywna, to $\mathcal{U}_1(1_{\mathcal{L}^I}, 0_{\mathcal{L}^I}) = 1_{\mathcal{L}^I}$ i dzięki (I3) mamy $0_{\mathcal{L}^I} = \mathcal{U}_2(1_{\mathcal{L}^I}, 0_{\mathcal{L}^I})$, czyli $\mathcal{U}_2$ jest koniunkcyjna. □

Zatem równanie funkcyjne (D-UU1) wystarczy rozważyć tylko dla przypadku, kiedy obie uninormy $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ są koniunkcyjne lub obie są alternatywne, podczas gdy równanie funkcyjne (D-UU2) tylko wtedy, gdy $\mathcal{U}_1$ jest koniunkcyjna, a $\mathcal{U}_2$ alternatywna lub odwrotnie – gdy $\mathcal{U}_1$ jest alternatywna, a $\mathcal{U}_2$ koniunkcyjna.

W całym niniejszym rozdziale w przypadku uninorm koniunkcyjnych zakładać będziemy warunek $(A-)$, a w przypadku uninorm alternatywnych $(A+)$ – na przeciwdziedzinach ich ciągłych addytywnych generatorów. Wówczas na mocy uwagi 1.36 uninormy te przyjmują prostą postać (1.4). Rozwiązanie równań rozdzielności (D-UU1), (D-UU2) przy innych kombinacjach założeń $(A-)$ / $(A+)$ pozostaje zatem problemem otwartym.

4.1 Ogólna metoda rozwiązywania równań rozdzielności dla rozkładalnych uninorm

Wyprowadzimy teraz równanie (F) z równań rozdzielności (D-UU1) oraz (D-UU2). Niech $\mathcal{U}_1 = (U_1, U_2)$, $\mathcal{U}_2 = (U_3, U_4)$ będą rozkładalnymi uninormami na $\mathcal{L}^I$. Zdefiniujmy projekcje na $\mathcal{L}^I$ w następujący sposób:

$$pr_1([x_1, x_2]) = x_1, \qquad pr_2([x_1, x_2]) = x_2, \qquad \text{dla } [x_1, x_2] \in L^I.$$

Równania (D-UU1), (D-UU2) przyjmują zatem postać:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}([x_1, x_2], &[U_1(y_1, z_1), U_2(y_2, z_2)]) \\ &= [U_3(pr_1(\mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2])), pr_1(\mathcal{I}([x_1, x_2], [z_1, z_2]))), \\ &\quad U_4(pr_2(\mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2])), pr_2(\mathcal{I}([x_1, x_2], [z_1, z_2])))], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}([U_1(x_1, y_1), &U_2(x_2, y_2)], [z_1, z_2]) \\ &= [U_3(pr_1(\mathcal{I}([x_1, x_2], [z_1, z_2])), pr_1(\mathcal{I}([y_1, y_2], [z_1, z_2]))), \\ &\quad U_4(pr_2(\mathcal{I}([x_1, x_2], [z_1, z_2])), pr_2(\mathcal{I}([y_1, y_2], [z_1, z_2])))], \end{aligned}$$

dla $[x_1, x_2], [y_1, y_2], [z_1, z_2] \in L^I$. W rezultacie otrzymujemy następujące cztery równania:

$$pr_1(\mathcal{I}([x_1, x_2], [U_1(y_1, z_1), U_2(y_2, z_2)])) = U_3(pr_1(\mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2])), pr_1(\mathcal{I}([x_1, x_2], [z_1, z_2]))),$$
$$pr_2(\mathcal{I}([x_1, x_2], [U_1(y_1, z_1), U_2(y_2, z_2)])) = U_4(pr_2(\mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2])), pr_2(\mathcal{I}([x_1, x_2], [z_1, z_2]))),$$

$$pr_1(\mathcal{I}([U_1(x_1, y_1), U_2(x_2, y_2)], [z_1, z_2])) = U_3(pr_1(\mathcal{I}([x_1, x_2], [z_1, z_2])), pr_1(\mathcal{I}([y_1, y_2], [z_1, z_2]))),$$
$$pr_2(\mathcal{I}([U_1(x_1, y_1), U_2(x_2, y_2)], [z_1, z_2])) = U_4(pr_2(\mathcal{I}([x_1, x_2], [z_1, z_2])), pr_2(\mathcal{I}([y_1, y_2], [z_1, z_2]))),$$

które są prawdziwe dla wszystkich $[x_1, x_2], [y_1, y_2], [z_1, z_2] \in L^I$. Następnie dla $[x_1, x_2], [z_1, z_2] \in L^I$ zdefiniujmy funkcje $k^1_{[x_1,x_2]}, k^2_{[x_1,x_2]}, l_1^{[z_1,z_2]}, l_2^{[z_1,z_2]} \colon \mathcal{L}^I \to \mathcal{L}^I$ przez:

- $k^1_{[x_1,x_2]}(\cdot) := pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], \cdot)$,
- $k^2_{[x_1,x_2]}(\cdot) := pr_2 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], \cdot)$,
- $l_1^{[z_1,z_2]}(\cdot) := pr_1 \circ \mathcal{I}(\cdot, [z_1, z_2])$,
- $l_2^{[z_1,z_2]}(\cdot) := pr_2 \circ \mathcal{I}(\cdot, [z_1, z_2])$,

gdzie $\circ$ oznacza standardowe złożenie funkcji. Pokazaliśmy zatem, że jeśli $\mathcal{U}_1$ oraz $\mathcal{U}_2$ na $\mathcal{L}^I$ są rozkładalnymi uninormami, to równaniom (D-UU1), (D-UU2) równoważne są następujące układy równań:

$$\begin{aligned} k^1_{[x_1,x_2]}([U_1(y_1, z_1), U_2(y_2, z_2)]) &= U_3(k^1_{[x_1,x_2]}([y_1, y_2]), k^1_{[x_1,x_2]}([z_1, z_2])),\\ k^2_{[x_1,x_2]}([U_1(y_1, z_1), U_2(y_2, z_2)]) &= U_4(k^2_{[x_1,x_2]}([y_1, y_2]), k^2_{[x_1,x_2]}([z_1, z_2])), \end{aligned} \tag{DUU-1'}$$

$$\begin{aligned} l_1^{[z_1,z_2]}([U_1(x_1, y_1), U_2(x_2, y_2)]) &= U_3(l_1^{[z_1,z_2]}([x_1, x_2]), l_1^{[z_1,z_2]}([y_1, y_2])),\\ l_2^{[z_1,z_2]}([U_1(x_1, y_1), U_2(x_2, y_2)]) &= U_4(l_2^{[z_1,z_2]}([x_1, x_2]), l_2^{[z_1,z_2]}([y_1, y_2])). \end{aligned} \tag{DUU-2'}$$

Przyjrzyjmy się najpierw równaniom (DUU-1'). Załóżmy, że $U_1 = U_2$ oraz $U_3 = U_4$ są uninormami reprezentowalnymi generowanymi przez odpowiednio generatory h_1 oraz h_3. Następnie załóżmy, że obie U_1, U_3 są koniunkcyjne lub obie alternatywne. Tak jak pisaliśmy wcześniej, jeśli obie są koniunkcyjne, to przyjmujemy założenie $(A-)$ na przeciwdziedzinach h_1 i h_3, natomiast jeśli obie są alternatywne, to przyjmujemy założenie $(A+)$ na obu tych zbiorach. Korzystając z twierdzeń o reprezentacji uninorm reprezentowalnych, tj. z twierdzenia 1.33 oraz uwagi 1.36, możemy przekształcić nasz problem do następującego równania (dla większej czytelności na razie rozważamy tylko funkcję k^1):

$$\begin{aligned} &k^1_{[x_1,x_2]}([h_1^{-1}(h_1(y_1) + h_1(z_1)), h_1^{-1}(h_1(y_2) + h_1(z_2))])\\ &\qquad = h_3^{-1}(h_3(k^1_{[x_1,x_2]}([y_1, y_2])) + h_3(k^1_{[x_1,x_2]}([z_1, z_2]))), \end{aligned}$$

gdzie $[x_1, x_2], [y_1, y_2], [z_1, z_2] \in L^I$. Oznaczmy $h_1(y_1) = u_1$, $h_1(y_2) = u_2$, $h_1(z_1) = v_1$ oraz $h_1(z_2) = v_2$. Oczywiście $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [-\infty, \infty]$ oraz $u_1 \leqslant u_2$, $v_1 \leqslant v_2$, ponieważ $y_1 \leqslant y_2$, $z_1 \leqslant z_2$, a generator h_1 jest ściśle rosnący. Jeżeli zdefiniujemy funkcję

$$f^1_{[x_1,x_2]}(u, v) := h_3 \circ k^1_{[x_1,x_2]}([h_1^{-1}(u), h_1^{-1}(v)]), \qquad u, v \in [-\infty, \infty],\ u \leqslant v,$$

to otrzymamy następujące równanie funkcyjne:

$$f^1_{[x_1,x_2]}(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = f^1_{[x_1,x_2]}(u_1, u_2) + f^1_{[x_1,x_2]}(v_1, v_2), \tag{4.1}$$

gdzie $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in L^{\overline{\infty}}$ oraz $f^1_{[x_1,x_2]} \colon L^{\overline{\infty}} \to [-\infty, \infty]$ jest nieznaną funkcją. Przez $L^{\overline{\infty}}$ oznaczyliśmy zbiór $\{(x_1, x_2) \in [-\infty, \infty]^2 : x_1 \leqslant x_2\}$.

Powtarzając wszystkie powyższe obliczenia dla funkcji k^2, otrzymamy analogiczne równanie funkcyjne:

$$f^2_{[x_1,x_2]}(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = f^2_{[x_1,x_2]}(u_1, u_2) + f^2_{[x_1,x_2]}(v_1, v_2), \tag{4.2}$$

gdzie $f^2_{[x_1,x_2]} \colon L^{\overline{\infty}} \to [-\infty, \infty]$ jest nieznaną funkcją zdefiniowaną przez

$$f^2_{[x_1,x_2]}(u, v) := h_3 \circ k^2_{[x_1,x_2]}([h_1^{-1}(u), h_1^{-1}(v)]), \qquad (u, v) \in L^{\overline{\infty}}.$$

Zauważmy, że (4.1) oraz (4.2) są dokładnie tym samym równaniem funkcyjnym (F), tj.

$$f(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = f(u_1, u_2) + f(v_1, v_2),$$

gdzie $f \colon L^{\overline{\infty}} \to [-\infty, \infty]$ jest nieznaną funkcją. Dziedzina i przeciwdziedzina f to, odpowiednio, przeciwdziedziny funkcji h_1 oraz h_3. Przypadek uninorm U_1, U_3 koniunkcyjnych prowadzi zatem do równania (F) z założeniem $(A-)$ na dziedzinie i przeciwdziedzinie szukanej funkcji f, natomiast przypadek uninorm U_1, U_3 alternatywnych do równania (F) z założeniem $(A+)$ na obu tych zbiorach.

Wróćmy teraz do równań (DUU-2'). Tak jak poprzednio, niech $U_1 = U_2$ oraz $U_3 = U_4$ będą uninormami reprezentowalnymi generowanymi odpowiednio przez generatory h_1 oraz h_3. Dzięki lematowi 4.2 wiemy, że wystarczy rozważyć dwa przypadki: gdy U_1 jest koniunkcyjna, a U_3 alternatywna, lub odwrotnie – gdy U_1 jest alternatywna, a U_3 koniunkcyjna. Wciąż zakładamy $(A-)$ na przeciwdziedzinach generatorów uninorm koniunkcyjnych oraz $(A+)$ na przeciwdziedzinach generatorów uninorm alternatywnych. Dla ustalonych $[z_1, z_2] \in L^I$ zdefiniujmy

$$g_1^{[z_1,z_2]}(u, v) := h_3 \circ l_1^{[z_1,z_2]}([h_1^{-1}(u), h_1^{-1}(v)]), \qquad (u, v) \in L^{\overline{\infty}},$$
$$g_2^{[z_1,z_2]}(u, v) := h_3 \circ l_2^{[z_1,z_2]}([h_1^{-1}(u), h_1^{-1}(v)]), \qquad (u, v) \in L^{\overline{\infty}}.$$

Powtarzając dla funkcji l_1, l_2 wszystkie obliczenia, które przeprowadziliśmy wcześniej dla k_1 oraz k_2, otrzymamy, że także funkcje $g_1^{[z_1,z_2]}$ i $g_2^{[z_1,z_2]}$ spełniają równanie funkcyjne (F). Tym razem przypadek uninormy U_1 koniunkcyjnej oraz uninormy U_3 alternatywnej prowadzi do równania (F) z założeniem $(A-)$ na dziedzinie oraz $(A+)$ na przeciwdziedzinie szukanej funkcji f, natomiast przypadek U_1 alternatywnej oraz U_3 koniunkcyjnej do równania (F) z założeniem $(A+)$ na dziedzinie i $(A-)$ na przeciwdziedzinie szukanej funkcji.

W kolejnym podrozdziale przedstawimy rozwiązania równania (F) dla wszystkich czterech potrzebnych kombinacji założeń $(A-)/(A+)$ na dziedzinie i przeciwdziedzinie szukanej funkcji.

4.2 O równaniu $f(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = f(u_1, u_2) + f(v_1, v_2)$

W podrozdziale 2.2.3 przedstawiliśmy uzyskane w ostatnich latach przez M. Baczyńskiego [8] rozwiązania równania Cauchy'ego rozszerzonego do nieskończoności, tj.

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in [-\infty, \infty],$$

gdzie $f \colon [-\infty, \infty] \to [-\infty, \infty]$ jest nieznaną funkcją. Równanie to zostało rozwiązane w czterech przypadkach różnych kombinacji założeń $(A-)/(A+)$ na dziedzinie i przeciwdziedzinie f. Wyniki zawarte w twierdzeniach 2.15 - 2.18 pozwolą nam rozwiązać tytułowe równanie tego podrozdziału:

$$f(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = f(u_1, u_2) + f(v_1, v_2), \tag{F}$$

gdzie $f\colon L^{\overline{\infty}} \to [-\infty,\infty]$ jest nieznaną funkcją. Przedstawimy pełen dowód pierwszego przypadku, kiedy na dziedzinie i przeciwdziedzinie f położymy założenie $(A-)$. W pozostałych przypadkach dowody są analogiczne i ze względu na ich charakter zostaną tutaj pominięte. W niniejszej pracy przez założenie $(A-)/(A+)$ na zbiorze $L^{\overline{\infty}}$ rozumiemy odpowiednie założenie na obu współrzędnych tego zbioru. Oczywiście w przyszłości można również rozważyć różne założenia na dwóch współrzędnych zbioru $L^{\overline{\infty}}$.

Twierdzenie 4.3. *Niech $L^{\overline{\infty}} = \{(u_1,u_2) \in [-\infty,\infty]^2 \mid u_1 \leqslant u_2\}$. Dla funkcji $f\colon L^{\overline{\infty}} \to [-\infty,\infty]$ następujące zdania są równoważne:*

(i) f spełnia równanie funkcyjne (F) *dla $(u_1,u_2),(v_1,v_2) \in L^{\overline{\infty}}$, z założeniem $(A-)$, tj. $(-\infty)+\infty = \infty+(-\infty) = -\infty$, na obu zbiorach dziedziny i przeciwdziedziny f.*

(ii) Zachodzi

$$f = -\infty, \qquad \text{(S1)} \qquad \textit{lub} \;\; f = 0, \qquad \text{(S2)} \qquad \textit{lub} \;\; f = \infty, \qquad \text{(S3)}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u = -\infty, \\ 0, & u > -\infty, \end{cases} \tag{S4}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & v = -\infty, \\ 0, & v > -\infty, \end{cases} \tag{S5}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} \infty, & u = -\infty, \\ 0, & u > -\infty, \end{cases} \tag{S6}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} \infty, & v = -\infty, \\ 0, & v > -\infty, \end{cases} \tag{S7}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u = -\infty, \\ \infty, & u > -\infty, \end{cases} \tag{S8}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & v = -\infty, \\ \infty, & v > -\infty, \end{cases} \tag{S9}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u \in \{-\infty,\infty\}, \\ \infty, & u \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{S10}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & v \in \{-\infty,\infty\}, \\ \infty, & v \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{S11}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u = -\infty \textit{ lub } v = \infty, \\ \infty, & u, v \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{S12}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & v = -\infty, \\ 0, & u > -\infty, \\ \infty, & u = -\infty \textit{ oraz } v > -\infty, \end{cases} \tag{S13}$$

lub istnieje taka jednoznacznie wyznaczona funkcja addytywna $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, że*

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u \in \{-\infty, \infty\}, \\ c(u), & u \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{S14}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & v \in \{-\infty, \infty\}, \\ c(v), & v \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{S15}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} \infty, & u \in \{-\infty, \infty\}, \\ c(u), & u \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{S16}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} \infty, & v \in \{-\infty, \infty\}, \\ c(v), & v \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{S17}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u = -\infty, \\ c(u), & u \in \mathbb{R}, \\ \infty, & u = \infty, \end{cases} \tag{S18}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & v = -\infty, \\ c(v), & v \in \mathbb{R}, \\ \infty, & v = \infty, \end{cases} \tag{S19}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & v = -\infty, \\ c(u), & u \in \mathbb{R}, \\ \infty, & (u = -\infty \textit{ oraz } v > -\infty) \textit{ lub } u = \infty, \end{cases} \tag{S20}$$

lub istnieją jednoznacznie wyznaczone funkcje addytywne $c_1, c_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, takie że*

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u = -\infty \textit{ lub } v = \infty, \\ c_1(u) + c_2(v), & u, v \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{S21}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} \infty, & u = -\infty \textit{ lub } v = \infty, \\ c_1(u) + c_2(v), & u, v \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{S22}$$

lub

$$f(u,v)=\begin{cases}-\infty, & u=-\infty,\\ c_1(u)+c_2(v), & u,v\in\mathbb{R},\\ \infty, & u>-\infty \textit{ oraz } v=\infty,\end{cases}\tag{S23}$$

lub

$$f(u,v)=\begin{cases}-\infty, & v=-\infty,\\ c_1(u)+c_2(v), & u,v\in\mathbb{R},\\ \infty, & (u=-\infty \textit{ oraz } v>-\infty) \textit{ lub } v=\infty,\end{cases}\tag{S24}$$

lub

$$f(u,v)=\begin{cases}-\infty, & u\in\{-\infty,\infty\},\\ c_1(u)+c_2(v), & u,v\in\mathbb{R},\\ \infty, & u\in\mathbb{R} \textit{ oraz } v=\infty,\end{cases}\tag{S25}$$

lub

$$f(u,v)=\begin{cases}-\infty, & v\in\{-\infty,\infty\},\\ c_1(u)+c_2(v), & u,v\in\mathbb{R},\\ \infty, & u=-\infty \textit{ oraz } v\in\mathbb{R},\end{cases}\tag{S26}$$

dla wszystkich $(u,v)\in L^{\overline{\infty}}$.

Dowód. „$(ii)\implies(i)$”
Dowód tej implikacji jest bezpośrednim przeliczeniem, że wszystkie funkcje (S1) - (S26) spełniają równanie (F).

„$(i)\implies(ii)$”
Niech $f\colon L^{\overline{\infty}}\to[-\infty,\infty]$ spełnia równanie (F) dla wszystkich $(u_1,u_2),(v_1,v_2)\in L^{\overline{\infty}}$. Przez $f_{-\infty}$, f^{∞}, f^0 oraz i oznaczmy następujące funkcje:

- $f_{-\infty}(\,\cdot\,):=f(-\infty,\,\cdot\,)$,
- $f^{\infty}(\,\cdot\,):=f(\,\cdot\,,\infty)$,
- $f^0(\,\cdot\,):=f(\,\cdot\,,0)$,
- $i(\,\cdot\,):=f(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$,

gdzie $f_{-\infty},f^{\infty},i\colon[-\infty,\infty]\to[-\infty,\infty]$ oraz $f^0\colon[-\infty,0]\to[-\infty,\infty]$. Wstawiając do (F) kolejno $u_1=v_1=-\infty$, $u_2=v_2=\infty$, $u_2=v_2=0$ oraz $u_1=u_2=u$ i $v_1=v_2=v$, otrzymujemy cztery równania:

$$\begin{aligned} f_{-\infty}(u_2+v_2)&=f_{-\infty}(u_2)+f_{-\infty}(v_2), && u_2,v_2\in[-\infty,\infty],\\ f^{\infty}(u_1+v_1)&=f^{\infty}(u_1)+f^{\infty}(v_1), && u_1,v_1\in[-\infty,\infty],\\ f^0(u_1+v_1)&=f^0(u_1)+f^0(v_1), && u_1,v_1\in[-\infty,0],\\ i(u+v)&=i(u)+i(v), && u,v\in[-\infty,\infty].\end{aligned}$$

Zatem funkcje $f_{-\infty}$, f^{∞}, f^0 oraz i spełniają równanie Cauchy'ego (C) na całych swoich dziedzinach. Z twierdzenia 2.15 znamy postać dziesięć możliwych rozwiązań tego równania przy założeniu $(A-)$ na dziedzinie i przeciwdziedzinie szukanej funkcji. Otóż funkcje $f_{-\infty}$, f^{∞} oraz i

mogą być stale równe $-\infty$, 0, ∞ lub przyjąć którąś z postaci (2.18) - (2.24). Natomiast w przypadku funkcji f^0, której dziedzina obcięta jest do $[-\infty, 0]$, niektóre rozwiązania się pokrywają lub stają się szczególnym przypadkiem innych. Mianowicie (2.20) i (2.21) oraz (2.22) i (2.24) pokrywają się, a (2.18) i (2.19) są szczególnymi przypadkami odpowiednio (2.22) i (2.23) dla funkcji addytywnej $c = 0$. Zatem f^0 może przyjąć jedną z sześć różnych postaci: $-\infty$, 0, ∞, (2.20), (2.22) lub (2.23).

Zanim rozważymy wszystkie możliwe kombinacje postaci funkcji $f_{-\infty}$, f^{∞}, f^0 oraz i, sformułujmy kilka pomocniczych równań funkcyjnych, które spełniają te funkcje. Wstawiając $u_1 = u_2 = 0$ oraz $v_1 = u$, $v_2 = v$ do (F), otrzymujemy

$$f(u,v) = f(0,0) + f(u,v), \qquad (u,v) \in L^{\overline{\infty}}. \tag{F0}$$

Zauważmy dalej, że w szczególności dla każdego $(u,v) \in L^{\overline{\infty}}$, takiego że $v < \infty$, zachodzi $u - v + v = u$. Dlatego wstawiając do (F) $v_1 = v_2 = v < \infty$ oraz $u_1 = u - v$, $u_2 = 0$, dla pewnego $u \leqslant v$, otrzymujemy $f(u - v + v, 0 + v) = f(u - v, 0) + f(v, v)$, co przepiszemy w postaci

$$f(u,v) = f^0(u-v) + i(v), \qquad (u,v) \in L^{\overline{\infty}}, v < \infty, \tag{F1}$$

Następnie wstawiając $u_1 = 0$, $u_2 = \infty$ do (F), dostajemy $f(v_1, \infty + v_2) = f(0, \infty) + f(v_1, v_2)$. Zatem

$$f^{\infty}(u) = f^{\infty}(0) + f(u,v), \qquad (u,v) \in L^{\overline{\infty}}, u, v \in \mathbb{R}. \tag{F2}$$

Wreszcie wstawiając analogicznie $u_1 = -\infty$ oraz $u_2 = 0$ do (F), otrzymujemy $f(-\infty, v_2) = f(-\infty, 0) + f(v_1, v_2)$ dla wszystkich $(v_1, v_2) \in L^{\overline{\infty}}$, co możemy przepisać w następującej formie

$$f_{-\infty}(v) = f_{-\infty}(0) + f(u,v), \qquad (u,v) \in L^{\overline{\infty}}. \tag{F3}$$

Rozważymy teraz systematycznie 10 możliwych postaci, które może przyjąć funkcja $f_{-\infty}$.

1. $f_{-\infty} = -\infty$. Wtedy $f^0(-\infty) = f(-\infty, 0) = f_{-\infty}(0) = -\infty$. Zatem f^0 może przyjąć tylko jedną z trzech postaci, w których zachodzi $f^0(-\infty) = -\infty$: $-\infty$, (2.20) lub (2.22).

   (1) $f^0 = -\infty$. Z (F0) otrzymujemy $f(u,v) = -\infty + f(u,v) = -\infty$, dla wszystkich $(u,v) \in L^{\overline{\infty}}$. Zatem $f = -\infty$ i jest to nasze pierwsze rozwiązanie (S1). Zauważmy, że założenie $(A-)$ odegrało kluczową rolę w tym wnioskowaniu.

   (2) $f^0(x) = \begin{cases} -\infty, & x = -\infty, \\ \infty, & x \in (-\infty, 0]. \end{cases}$

   Wstawiając $u > -\infty$ do (F1), otrzymujemy $f(u,v) = \infty + i(v)$. Zatem $f(u,v) = i(v) \in \{-\infty, \infty\}$ dla każdego $(u,v) \in L^{\overline{\infty}}$, takiego że $u > -\infty$ oraz $v < \infty$, czyli $u, v \in \mathbb{R}$. Stąd f przyjmuje dla każdego $(u,v) \in L^{\overline{\infty}}$ następującą postać:

   $$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u = -\infty, \\ i(v), & u, v \in \mathbb{R}, \\ f^{\infty}(u), & u > -\infty \text{ oraz } v = \infty. \end{cases} \tag{*1.(2)}$$

   Ponieważ wiemy już, że $i(-\infty) = -\infty$ oraz $i(0) = \infty$, funkcja i może przyjąć tylko jedną z dwóch postaci: (2.20) lub (2.21).

A. $i(x) = \begin{cases} -\infty, & x = -\infty, \\ \infty, & x \in (-\infty, \infty]. \end{cases}$

Wtedy $f^\infty(-\infty) = -\infty$, $f^\infty(\infty) = \infty$, więc f^∞ może przyjąć postać (2.20) lub (2.24).

(a) $f^\infty(x) = \begin{cases} -\infty, & x = -\infty, \\ \infty, & x \in (-\infty, \infty]. \end{cases}$

Wstawiając do (*1.(2)) wypisane przed chwilą funkcje $i = f^\infty$ postaci (2.20), otrzymujemy rozwiązanie (S8).

(b) $f^\infty(x) = \begin{cases} -\infty, & x = -\infty, \\ c(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \infty, & x = \infty, \end{cases}$ dla pewnej addytywnej funkcji $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Wówczas równanie (F2) przyjmuje postać $c(u) = c(0) + i(v) = \infty$ dla wszystkich $(u, v) \in L^{\overline{\infty}}$, takich że $u, v \in \mathbb{R}$, a to jest sprzeczność, ponieważ c przyjmuje jedynie wartości rzeczywiste.

B. $i(x) = \begin{cases} -\infty, & x \in \{-\infty, \infty\}, \\ \infty, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Wtedy $f^\infty(-\infty) = f^\infty(\infty) = -\infty$, więc funkcja f^∞ przyjmuje jedną z trzech postaci: $-\infty$, (2.21) lub (2.22).

(a) $f^\infty = -\infty$. Wówczas łącznie otrzymujemy rozwiązanie (S12).

(b) $f^\infty(x) = \begin{cases} -\infty, & x \in \{-\infty, \infty\}, \\ \infty, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$ Zatem dostajemy rozwiązanie (S10).

(c) $f^\infty(x) = \begin{cases} -\infty, & x \in \{-\infty, \infty\}, \\ c(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$ dla pewnej addytywnej funkcji $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Wtedy, podobnie jak w przypadku 1.(2).A.(b)., równanie (F2) przyjmuje postać $c(u) = c(0) + i(v) = \infty$, dla $(u, v) \in L^{\overline{\infty}}$, takich że $u, v \in \mathbb{R}$, co jest sprzeczne z tym, że funkcja c ma wartości tylko rzeczywiste.

(3) $f^0(x) = \begin{cases} -\infty, & x = -\infty, \\ c(x), & x \in (-\infty, 0], \end{cases}$ dla pewnej addytywnej funkcji $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Wstawiając takie $(u, v) \in L^{\overline{\infty}}$, że $u, v \in \mathbb{R}$, do (F1), otrzymujemy $f(u, v) = c(u - v) + i(v)$. Stąd f przyjmuje dla każdego $(u, v) \in L^{\overline{\infty}}$ następującą postać:

$$f(u, v) = \begin{cases} -\infty, & u = -\infty, \\ c(u - v) + i(v), & u, v \in \mathbb{R}, \\ f^\infty(u), & u > -\infty \text{ oraz } v = \infty. \end{cases} \tag{*1.(3)}$$

Zachodzi $i(-\infty) = -\infty$ oraz $i(0) = c(0) = 0$, ponieważ funkcja c jest addytywna. Zatem i może przyjąć tylko jedną z trzech postaci: (2.18), (2.22) lub (2.24).

A. $i(x) = \begin{cases} -\infty, & x = -\infty, \\ 0, & x \in (-\infty, \infty]. \end{cases}$

Wówczas $f^\infty(-\infty) = -\infty$ oraz $f^\infty(\infty) = 0$, co implikuje jedyną możliwość $f^\infty = i$, czyli f^∞ jest postaci (2.18). W tej sytuacji równanie (F2) przyjmuje postać $0 = 0 + (c(u-v) + 0)$ dla wszystkich $(u, v) \in L^{\overline{\infty}}$, takich że $u, v \in \mathbb{R}$, a stąd $c = 0$. Wstawiając do (*1.(3)) funkcję $c = 0$ oraz wypisane przed chwilą $i = f^\infty$ postaci (2.18), otrzymujemy rozwiązanie (S4).

B. $i(x) = \begin{cases} -\infty, & x \in \{-\infty, \infty\}, \\ c_2(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$ dla pewnej addytywnej funkcji $c_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Zatem z (*1.(3)) dla $u, v \in \mathbb{R}$ mamy $f(u, v) = c(u-v) + c_2(v) = c(u) - c(v) + c_2(v)$. Aby uprościć zapis przez c_0 oznaczmy funkcję $-c + c_2$. Funkcja c_0 oczywiście także jest addytywna i zachodzi $f(u, v) = c(u) + c_0(v)$ dla $u, v \in \mathbb{R}$. Tego typu przekształcenia wzoru funkcji f będziemy używali kilkukrotnie w kolejnych punktach dowodu, już nie wypisując tego explicite.
Następnie, o funkcji f^∞ wiemy, że $f^\infty(-\infty) = f^\infty(\infty) = -\infty$, a zatem f^∞ może przyjąć jedną z trzech postaci: $-\infty$, (2.21) lub (2.22).

(a) $f^\infty = -\infty$. Wówczas otrzymujemy rozwiązanie (S21).

(b) $f^\infty(x) = \begin{cases} -\infty, & x \in \{-\infty, \infty\}, \\ \infty, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$ Łącznie dostajemy rozwiązanie (S25).

(c) $f^\infty(x) = \begin{cases} -\infty, & x \in \{-\infty, \infty\}, \\ c_3(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$ dla addytywnej funkcji $c_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Wtedy równanie (F2) przyjmuje postać

$$c_3(u) = c_3(0) + (c(u-v) + c_2(v)) = c(u) - c(v) + c_2(v),$$

dla wszystkich $(u, v) \in L^{\overline{\infty}}$, takich że $u, v \in \mathbb{R}$. Zatem suma $-c(v) + c_2(v)$ musi być stała dla wszystkich $v \in \mathbb{R}$, a ponieważ obie funkcje c i c_2 są addytywne, dostajemy $c = c_2$. Stąd także $c_3 = c$ i ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie (S14).

C. $i(x) = \begin{cases} -\infty, & x = -\infty, \\ c_2(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \infty, & x = \infty, \end{cases}$ dla pewnej addytywnej funkcji $c_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Wówczas $f^\infty(-\infty) = -\infty$ oraz $f^\infty(\infty) = \infty$, stąd f^∞ przyjmuje jedną z dwóch postaci: (2.20) lub (2.24).

(a) $f^\infty(x) = \begin{cases} -\infty, & x = -\infty, \\ \infty, & x \in (-\infty, \infty]. \end{cases}$ Dostajemy rozwiązanie (S23).

(b) $f^\infty(x) = \begin{cases} -\infty, & x = -\infty, \\ c_3(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \infty, & x = \infty, \end{cases}$ dla pewnej addytywnej funkcji $c_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Wówczas równanie (F2) przyjmuje postać $c_3(u) = c_3(0) + (c(u-v) + c_2(v))$ dla wszystkich $(u, v) \in L^{\overline{\infty}}$, takich że $u, v \in \mathbb{R}$, i tak jak w przypadku 1.(3).(B).(c) otrzymujemy $c = c_2 = c_3$. Łącznie prowadzi to do rozwiązania (S18).

2. $f_{-\infty} = 0$. Z (F3) otrzymujemy $0 = 0 + f(u,v)$ dla wszystkich $(u,v) \in \overline{L^{\infty}}$. Otrzymujemy więc rozwiązanie $f = 0$, czyli f postaci (S2).

3. $f_{-\infty} = \infty$. Z (F3) otrzymujemy $\infty = \infty + f(u,v)$ dla wszystkich $(u,v) \in \overline{L^{\infty}}$, a stąd $f > -\infty$. Ponieważ $f^0(-\infty) = \infty$, funkcja f^0 równa jest stale ∞ lub jest postaci (2.23).

   (1) $f^0 = \infty$. Wtedy równanie (F1) przyjmuje postać $f(u,v) = \infty + i(v)$ dla wszystkich $(u,v) \in \overline{L^{\infty}}, u,v \in \mathbb{R}$. Wiemy już, że $i > -\infty$, stąd prawa strona ostatniego równania stale jest równa ∞. Zatem $f(u,v) = \infty$ dla wszystkich $(u,v) \in \overline{L^{\infty}}$, takich że $v < \infty$. O funkcji i wiemy, że $i(-\infty) = i(0) = \infty$, więc $i = \infty$. Stąd $f^{\infty}(-\infty) = f^{\infty}(\infty) = \infty$ i f^{∞} może przyjąć jedną z tylko dwóch postaci: ∞ lub (2.23).

      A. $f^{\infty} = \infty$. Wówczas dostajemy rozwiązanie (S3): $f = \infty$.

      B. $f^{\infty}(x) = \begin{cases} \infty, & x \in \{-\infty, \infty\}, \\ c(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$ dla pewnej addytywnej funkcji $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

      Wtedy równanie (F2) przyjmuje postać $c(u) = c(0) + \infty = \infty$ dla wszystkich $(u,v) \in \overline{L^{\infty}}$, $u,v \in \mathbb{R}$, co jest sprzeczne z tym, że funkcja c przyjmuje jedynie wartości rzeczywiste.

   (2) $f^0(x) = \begin{cases} \infty, & x = -\infty, \\ c(x), & x \in (-\infty, 0]. \end{cases}$

   Z (F1) otrzymujemy $f(u,v) = c(u-v) + i(v)$ dla wszystkich $(u,v) \in \overline{L^{\infty}}$, $u,v \in \mathbb{R}$. Zatem funkcja f przyjmuje następującą postać:

$$f(u,v) = \begin{cases} \infty, & u = -\infty, \\ c(u-v) + i(v), & u,v \in \mathbb{R}, \\ f^{\infty}(u), & u > -\infty \text{ oraz } v = \infty, \end{cases} \tag{*3.(2)}$$

   dla wszystkich $(u,v) \in \overline{L^{\infty}}$. Ponieważ $i(-\infty) = \infty$ oraz $i(0) = c(0) = 0$, funkcja i może przyjąć jedną z dwóch postaci: (2.19) lub (2.23).

      A. $i(x) = \begin{cases} \infty, & x = -\infty, \\ 0, & x \in (-\infty, \infty]. \end{cases}$

      Wtedy $f^{\infty}(-\infty) = \infty$ oraz $f^{\infty}(\infty) = 0$, co implikuje $f^{\infty} = i$ oraz równanie (F2) przyjmuje postać $0 = 0 + (c(u-v) + 0)$ dla wszystkich $(u,v) \in \overline{L^{\infty}}$, $u,v \in \mathbb{R}$. Zatem $c = 0$ i otrzymujemy rozwiązanie (S6).

      B. $i(x) = \begin{cases} \infty, & x \in \{-\infty, \infty\}, \\ c_2(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$ dla pewnej addytywnej funkcji $c_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

      Wtedy $f^{\infty}(-\infty) = f^{\infty}(\infty) = \infty$, a stąd funkcja f^{∞} może być stale równa ∞ lub być postaci (2.23).

         (a) $f^{\infty} = \infty$. Łącznie dostajemy rozwiązanie (S22).

         (b) $f^{\infty}(x) = \begin{cases} \infty, & x \in \{-\infty, \infty\}, \\ c_3(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$ dla addytywnej funkcji $c_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

         Wówczas równanie (F2) przyjmuje postać $c_3(u) = c_3(0) + (c(u-v) + c_2(v))$ dla wszystkich $(u, v) \in \overline{L^{\infty}}$, takich że $u, v \in \mathbb{R}$. Tak jak w przypadkach 1.(3).B.(c) oraz 1.(3).C.(b) wnioskujemy, że $c = c_2 = c_3$, a zatem łącznie otrzymujemy rozwiązanie (S16).

4. $f_{-\infty}(x) = \begin{cases} -\infty, & x = -\infty, \\ 0, & x \in (-\infty, \infty]. \end{cases}$

   Z równania (F3) dostajemy $f(u, v) = f_{-\infty}(v)$, co prowadzi do rozwiązania (S5).

5. $f_{-\infty}(x) = \begin{cases} \infty, & x = -\infty, \\ 0, & x \in (-\infty, \infty]. \end{cases}$

   Ponownie z równania (F3) dostajemy $f(u, v) = f_{-\infty}(v)$, co tym razem prowadzi do rozwiązania (S7).

6. $f_{-\infty}(x) = \begin{cases} -\infty, & x = -\infty, \\ \infty, & x \in (-\infty, \infty]. \end{cases}$

   Wówczas równanie (F3) przyjmuje postać $f_{-\infty}(v) = \infty + f(u, v)$, zatem dla $v > -\infty$ zachodzi $f(u, v) > -\infty$. Ponieważ $f^0(-\infty) = \infty$, mamy dwie możliwe postacie funkcji f^0: ∞ oraz (2.23).

   (1) $f^0 = \infty$. Ponieważ $i(v) > -\infty$ dla $v > -\infty$, to równanie (F1) przyjmuje postać $f(u, v) = \infty + i(v) = \infty$ dla wszystkich $(u, v) \in \overline{L^{\infty}}$, $u, v \in \mathbb{R}$. Stąd funkcja f jest postaci

   $$f(u, v) = \begin{cases} -\infty, & u = v = -\infty, \\ \infty, & (u = -\infty \text{ oraz } v > -\infty) \text{ lub } u, v \in \mathbb{R}, \\ f^{\infty}(u) & u > -\infty, v = \infty, \end{cases} \qquad (*6.(1))$$

   dla $(u, v) \in \overline{L^{\infty}}$. Zachodzi $i(-\infty) = -\infty$, $i(0) = \infty$ oraz $i(v) > -\infty$ dla $v > -\infty$, stąd i przyjmuje postać (2.20), tj.

   $$i(x) = \begin{cases} -\infty, & x = -\infty, \\ \infty, & x \in (-\infty, \infty]. \end{cases}$$

   Zatem $f^{\infty}(-\infty) = f^{\infty}(\infty) = \infty$, a stąd funkcja f^{∞} może być stale równa ∞ lub przyjąć postać (2.23).

   A. $f^{\infty} = \infty$. Otrzymujemy rozwiązanie (S9).

   B. $f^{\infty}(x) = \begin{cases} \infty, & x \in \{-\infty, \infty\}, \\ c(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$ dla pewnej addytywnej funkcji $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   Wówczas równanie (F2) przyjmuje postać $c(u) = c(0) + \infty = \infty$ dla wszystkich $(u, v) \in \overline{L^{\infty}}$, $u, v \in \mathbb{R}$. Jest to sprzeczne z tym, że funkcja c przyjmuje jedynie rzeczywiste wartości.

   (2) $f^0(x) = \begin{cases} \infty, & x = -\infty, \\ c(x), & x \in (-\infty, 0], \end{cases}$ dla pewnej funkcji addytywnej $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Wstawiając $u, v \in \mathbb{R}$ do (F1), dostajemy $f(u,v) = c(u-v) + i(v)$. Zatem funkcja f dla dowolnych $(u,v) \in L^{\overline{\infty}}$ przyjmuje postać

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u = v = -\infty, \\ c(u-v) + i(v), & u, v \in \mathbb{R}, \\ \infty, & u = -\infty, v > -\infty, \\ f^{\infty}(u), & u > -\infty, v = \infty. \end{cases} \tag{*6.(2)}$$

O funkcji i wiemy, że $i(-\infty) = -\infty$, $i(0) = 0$ oraz $i(v) > -\infty$ dla $v > -\infty$, więc może ona przyjąć postać (2.18) lub (2.24).

A. $i(x) = \begin{cases} -\infty, & x = -\infty, \\ 0, & x \in (-\infty, \infty]. \end{cases}$

Wtedy $f^{\infty}(-\infty) = \infty$ oraz $f^{\infty}(\infty) = 0$, co implikuje, że f^{∞} jest postaci (2.19), czyli $f^{\infty} = -i$. W tej sytuacji równanie (F2) przyjmuje postać $0 = 0 + (c(u-v) + 0)$ dla wszystkich $(u,v) \in L^{\overline{\infty}}$, $u, v \in \mathbb{R}$. Stąd $c = 0$ i ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie (S13).

B. $i(x) = \begin{cases} -\infty, & x = -\infty, \\ c_2(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \infty, & x = \infty, \end{cases}$ dla pewnej addytywnej funkcji $c_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Wtedy $f^{\infty}(-\infty) = f^{\infty}(\infty) = \infty$, zatem $f^{\infty} = \infty$ lub f^{∞} przyjmuje postać (2.23).

(a) $f^{\infty} = \infty$. Wówczas dostajemy rozwiązanie (S24).

(b) $f^{\infty}(x) = \begin{cases} \infty, & x \in \{-\infty, \infty\}, \\ c_3(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$ dla addytywnej funkcji $c_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Równanie (F2) przyjmuje postać $c_3(u) = c_3(0) + (c(u-v) + c_2(v))$ dla wszystkich $(u,v) \in L^{\overline{\infty}}$, $u, v \in \mathbb{R}$, i podobnie jak w przypadkach 1.(3).B.(c), 1.(3).C.(b) i 3.(2).B.(b) otrzymujemy $c = c_2 = c_3$. Łącznie prowadzi to do rozwiązania (S20).

7. $f_{-\infty}(x) = \begin{cases} -\infty, & x \in \{-\infty, \infty\}, \\ \infty, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Równanie (F3) przyjmuje postać $f_{-\infty}(v) = \infty + f(u,v)$ dla wszystkich $(u,v) \in L^{\overline{\infty}}$. Wstawiając w nim $v = \infty$, otrzymujemy, że $f^{\infty} = -\infty$. Natomiast dla $v \in \mathbb{R}$ dostajemy, że $\infty = \infty + f(u,v)$, a więc $f(u,v) > -\infty$. Zatem funkcja f jest następującej postaci:

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & v \in \{-\infty, \infty\}, \\ \infty, & u = -\infty, v \in \mathbb{R}, \\ f(u,v) > -\infty, & u, v \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{*7.}$$

Zachodzi $f^0(-\infty) = \infty$ oraz $f^0 > -\infty$, więc $f^0 = \infty$ lub jest postaci (2.23).

(1) $f^0 = \infty$. Wtedy równanie (F1) przyjmuje postać $f(u,v) = \infty + i(v) \in \{-\infty, \infty\}$ dla wszystkich $(u,v) \in L^{\overline{\infty}}$, takich że $v < \infty$. Wcześniej pokazaliśmy, że $f(u,v) > -\infty$ dla $u, v \in \mathbb{R}$, zatem na tym zbiorze $f = \infty$. Łącznie prowadzi to do rozwiązania (S11).

(2) $f^0(x) = \begin{cases} \infty, & x \in \{-\infty, \infty\}, \\ c(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$ dla pewnej addytywnej funkcji $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Wówczas wstawiając takie $(u, v) \in L^{\overline{\infty}}$, że $u, v \in \mathbb{R}$, do (F1), otrzymujemy $f(u, v) = c(u - v) + i(v)$. Ponadto $i(-\infty) = -\infty, i(0) = 0$ oraz $i(\infty) = -\infty$, więc i przyjmuje jedyną postać (2.22). Rozwiązanie f jest ostatecznie postaci (S26).

8. $f_{-\infty}(x) = \begin{cases} -\infty, & x \in \{-\infty, \infty\}, \\ c(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$ dla pewnej addytywnej funkcji $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   Wówczas z (F3) otrzymujemy $f(u, v) = f_{-\infty}(v)$, co prowadzi do rozwiązania (S15).

9. $f_{-\infty}(x) = \begin{cases} \infty, & x \in \{-\infty, \infty\}, \\ c(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$ dla pewnej addytywnej funkcji $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

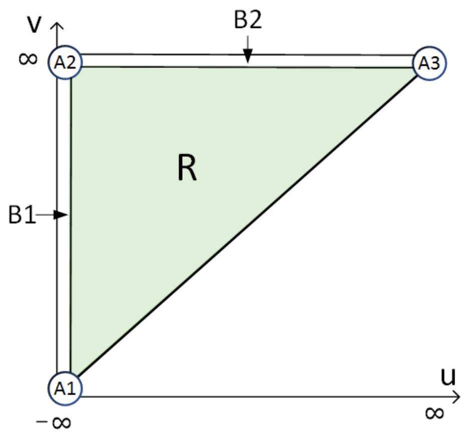
   Wówczas z (F3) otrzymujemy $f(u, v) = f_{-\infty}(v)$, co prowadzi do rozwiązania (S17).

10. $f_{-\infty}(x) = \begin{cases} -\infty, & x = -\infty, \\ c(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \infty, & x = \infty, \end{cases}$ dla pewnej addytywnej funkcji $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

    Wówczas z (F3) otrzymujemy $f(u, v) = f_{-\infty}(v)$, co prowadzi do rozwiązania (S19).

□

Uwaga 4.4. Dziedzinę funkcji f możemy podzielić na sześć części: A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 oraz R, które są zaprezentowane symbolicznie na rys. 4.1. Używając nowych oznaczeń, możemy np. zapisać $A_1 \cup B_1 \cup A_2 = \{(u, v) \in L^{\overline{\infty}} : u = -\infty\}$ lub $R = \{(u, v) \in L^{\overline{\infty}} : u, v \in \mathbb{R}\}$.



Rysunek 4.1: Podział zbioru $L^{\overline{\infty}}$ na sześć podzbiorów: $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, R$

Otrzymaliśmy, że funkcja f może przyjąć tylko następujące wartości na konkrentych zbiorach:

- B_1: $-\infty$, $c(v)$, ∞;
- B_2: $-\infty$, $c(u)$, ∞;
- A_1, A_2, A_3: $-\infty$, 0, ∞;
- R: $-\infty$, $c_1(u) + c_2(v)$, ∞.

Oczywiście nie wszystkie 729 kombinacji tych opcji pojawiło się wśród rozwiązań w twierdzeniu 4.3. Na przykład, jeśli funkcja f jest równa $c(v)$ na B_1, to na R jest także równa $c(v)$, natomiast na pewno nie jest równa $c(u)$ na B_2.

Twierdzenie 4.5. *Dla funkcji $f\colon L^{\overline{\infty}} \to [-\infty, \infty]$ następujące zdania są równoważne:*

(i) f *spełnia równanie funkcyjne* (F) *dla* $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in L^{\overline{\infty}}$*, z założeniem (A+), tj.* $(-\infty) + \infty = \infty + (-\infty) = \infty$*, na obu zbiorach dziedziny i przeciwdziedziny* f*.*

(ii) f *jest postaci* (S1), (S2), (S3) *lub*

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u = \infty, \\ 0, & u < \infty, \end{cases} \tag{S27}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & v = \infty, \\ 0, & v < \infty, \end{cases} \tag{S28}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} \infty, & u = \infty, \\ 0, & u < \infty, \end{cases} \tag{S29}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} \infty, & v = \infty, \\ 0, & v < \infty, \end{cases} \tag{S30}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u < \infty, \\ \infty, & u = \infty, \end{cases} \tag{S31}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & v < \infty, \\ \infty, & v = \infty, \end{cases} \tag{S32}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & v \in \mathbb{R}, \\ \infty, & v \in \{-\infty, \infty\}, \end{cases} \tag{S33}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u \in \mathbb{R}, \\ \infty, & u \in \{-\infty, \infty\}, \end{cases} \tag{S34}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u, v \in \mathbb{R}, \\ \infty, & u = -\infty \textit{ lub } v = \infty, \end{cases} \tag{S35}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u < \infty \textit{ oraz } v = \infty, \\ 0, & v < \infty, \\ \infty, & u = \infty, \end{cases} \tag{S36}$$

lub istnieje taka jednoznacznie wyznaczona funkcja addytywna $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, że* f *jest postaci* (S14)*,* (S15)*,* (S16)*,* (S17)*,* (S18)*,* (S19) *lub*

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & (u < \infty \text{ oraz } v = \infty) \text{ lub } v = -\infty, \\ c(v), & v \in \mathbb{R}, \\ \infty, & u = \infty, \end{cases} \tag{S37}$$

lub istnieją takie jednoznacznie wyznaczone funkcje addytywne $c_1, c_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, że* f *jest postaci* (S21)*,* (S22) *lub*

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u = -\infty \text{ oraz } v < \infty, \\ c_1(u) + c_2(v), & u, v \in \mathbb{R}, \\ \infty, & v = \infty, \end{cases} \tag{S38}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & (u < \infty \text{ oraz } v = \infty) \text{ lub } u = -\infty, \\ c_1(u) + c_2(v), & u, v \in \mathbb{R}, \\ \infty, & u = \infty, \end{cases} \tag{S39}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u \in \mathbb{R} \text{ oraz } v = \infty, \\ c_1(u) + c_2(v), & u, v \in \mathbb{R}, \\ \infty, & u \in \{-\infty, \infty\}, \end{cases} \tag{S40}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u = -\infty \text{ oraz } v \in \mathbb{R}, \\ c_1(u) + c_2(v), & u, v \in \mathbb{R}, \\ \infty, & v \in \{-\infty, \infty\}, \end{cases} \tag{S41}$$

dla wszystkich $(u,v) \in L^{\overline{\infty}}$*.*

Twierdzenie 4.6. *Dla funkcji* $f\colon L^{\overline{\infty}} \to [-\infty, \infty]$ *następujące zdania są równoważne:*

(i) f *spełnia równanie funkcyjne* (F) *dla* $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in L^{\overline{\infty}}$*, z założeniem (A−), tj.* $(-\infty) + \infty = \infty + (-\infty) = -\infty$*, na dziedzinie funkcji* f *oraz (A+), tj.* $(-\infty) + \infty = \infty + (-\infty) = \infty$*, na przeciwdziedzinie funkcji* f*.*

(ii) f *jest postaci* (S1)*,* (S2)*,* (S3)*,* (S4)*,* (S5)*,* (S6)*,* (S7)*,* (S33)*,* (S34)*,* (S35) *lub*

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u > -\infty, \\ \infty, & u = -\infty, \end{cases} \tag{S42}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & v > -\infty, \\ \infty, & v = -\infty, \end{cases} \tag{S43}$$

lub istnieje taka jednoznacznie wyznaczona funkcja addytywna $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że f jest postaci (S14), (S16) *lub*

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u = \infty, \\ c(u), & u \in \mathbb{R}, \\ \infty, & u = -\infty, \end{cases} \tag{S44}$$

lub istnieją takie jednoznacznie wyznaczone funkcje addytywne $c_1, c_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że f jest postaci (S21), (S22), (S40), (S41) *lub*

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u > -\infty \text{ oraz } v = \infty, \\ c_1(u) + c_2(v), & u, v \in \mathbb{R}, \\ \infty, & u = -\infty, \end{cases} \tag{S45}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & (u = -\infty \text{ oraz } v > -\infty) \text{ lub } v = \infty, \\ c_1(u) + c_2(v), & u, v \in \mathbb{R}, \\ \infty, & v = -\infty, \end{cases} \tag{S46}$$

dla wszystkich $(u,v) \in L^{\overline{\infty}}$.

Twierdzenie 4.7. *Dla funkcji $f\colon L^{\overline{\infty}} \to [-\infty, \infty]$ następujące zdania są równoważne:*

(i) f spełnia równanie funkcyjne (F) *dla $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in L^{\overline{\infty}}$, z założeniem (A+), tj. $(-\infty) + \infty = \infty + (-\infty) = \infty$, na dziedzinie funkcji f oraz (A−), tj. $(-\infty) + \infty = \infty + (-\infty) = -\infty$, na przeciwdziedzinie funkcji f.*

(ii) f jest postaci (S1), (S2), (S3), (S10), (S11), (S12), (S27), (S28), (S30) *lub*

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u = \infty, \\ \infty, & u < \infty, \end{cases} \tag{S47}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & v = \infty, \\ \infty, & v < \infty, \end{cases} \tag{S48}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u = \infty, \\ 0, & v < \infty, \\ \infty, & u < \infty \text{ oraz } v = \infty, \end{cases} \tag{S49}$$

lub istnieje taka jednoznacznie wyznaczona funkcja addytywna $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że f jest postaci (S14), (S15), (S16), (S17), (S44) *lub*

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & v = \infty, \\ c(v), & v \in \mathbb{R}, \\ \infty, & v = -\infty, \end{cases} \tag{S50}$$

lub

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u = \infty, \\ c(v), & v \in \mathbb{R}, \\ \infty, & u < \infty \textit{ oraz } v = \infty \textit{ lub } v = -\infty, \end{cases} \tag{S51}$$

lub istnieją takie jednoznacznie wyznaczone funkcje addytywne $c_1, c_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, że* f *jest postaci* (S21), (S22), (S25), (S26), (S27), (S39) *lub*

$$f(u,v) = \begin{cases} -\infty, & v = \infty, \\ c_1(u) + c_2(v), & u, v \in \mathbb{R}, \\ \infty, & u = -\infty \textit{ oraz } v < \infty, \end{cases} \tag{S52}$$

dla wszystkich $(u,v) \in L^{\overline{\infty}}$.

4.3 Rozwiązania równań rozdzielności

Posiadając wyniki z poprzedniego podrozdziału, możemy teraz wrócić do rozważań dotyczących równań rozdzielności (D-UU1), (D-UU2) i określić możliwe przekroje pionowe lub poziome ich rozwiązań $\mathcal{I} \colon (\mathcal{L}^I)^2 \to \mathcal{L}^I$. Mianowicie:

- z twierdzenia 4.3 możemy wyprowadzić opis pierwszej i drugiej współrzędnej przekroju pionowego $\mathcal{I}([x_1, x_2], \cdot)$ dla ustalonych $[x_1, x_2] \in L^I$, gdzie $\mathcal{I}$ jest rozwiązaniem równania (D-UU1) dla dwóch koniunkcyjnych uninorm rozkładalnych na $\mathcal{L}^I$;

- z twierdzenia 4.5 możemy wyprowadzić opis pierwszej i drugiej współrzędnej przekroju pionowego rozwiązań równania (D-UU1) dla dwóch alternatywnych uninorm rozkładalnych na $\mathcal{L}^I$;

- z twierdzenia 4.6 możemy wyprowadzić opis pierwszej i drugiej współrzędnej przekroju poziomego $\mathcal{I}(\cdot, [z_1, z_2])$ dla ustalonych $[z_1, z_2] \in L^I$, gdzie $\mathcal{I}$ jest rozwiązaniem równania (D-UU2) dla dwóch uninorm rozkładalnych na $\mathcal{L}^I$, $\mathcal{U}_1$ koniunkcyjnej oraz $\mathcal{U}_2$ alternatywnej;

- z twierdzenia 4.7 możemy wyprowadzić opis pierwszej i drugiej współrzędnej przekroju poziomego rozwiązań równania (D-UU2) dla dwóch uninorm rozkładalnych na $\mathcal{L}^I$, $\mathcal{U}_1$ alternatywnej oraz $\mathcal{U}_2$ koniunkcyjnej.

W niniejszej pracy ze szczegółami przedstawimy analizę pierwszego z wymienionych przed chwilą przypadków. Analiza pozostałych trzech przebiega w analogiczny sposób.

Przypomnimy najpierw kilka najważniejszych oznaczeń z podrozdziału 4.1. Niech $\mathcal{U}_1 = (U_1, U_2)$, $\mathcal{U}_2 = (U_3, U_4)$ będą rozkładalnymi uninormami na $\mathcal{L}^I$, takimi że $U_1 = U_2$ oraz $U_3 = U_4$ są koniunkcyjnymi uninormami reprezentowalnymi z ciągłymi addytywnymi generatorami h_1 i h_3, odpowiednio, oraz elementami neutralnymi e_1 i e_3. Generatory $h_1, h_3 \colon [0,1] \to [-\infty, \infty]$ są ściśle rosnące i zachodzi $h_1(0) = h_3(0) = -\infty$, $h_1(e_1) = h_3(e_3) = 0$ oraz $h_1(1) = h_3(1) = \infty$. Ponadto na obu przeciwdziedzinach h_1 i h_3 kładziemy założenie $(A-)$, tj. $(-\infty) + \infty = \infty +$

$(-\infty) = -\infty$. Wówczas dla ustalonych $[x_1, x_2] \in L^I$ funkcje $f^1_{[x_1,x_2]}, f^2_{[x_1,x_2]} \colon L^{\overline{\infty}} \to [-\infty, \infty]$, gdzie

$$f^1_{[x_1,x_2]}(u_1, u_2) = h_3 \circ pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [h_1^{-1}(u_1), h_1^{-1}(u_2)]), \qquad (u_1, u_2) \in L^{\overline{\infty}},$$
$$f^2_{[x_1,x_2]}(u_1, u_2) = h_3 \circ pr_2 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [h_1^{-1}(u_1), h_1^{-1}(u_2)]), \qquad (u_1, u_2) \in L^{\overline{\infty}},$$

spełniają równanie (F) przy założeniu $(A-)$ na swoich dziedzinach i przeciwdziedzinach. Zatem z twierdzenia 4.3 możemy odczytać dwadzieścia sześć możliwych postaci funkcji $f^1_{[x_1,x_2]}$ oraz $f^2_{[x_1,x_2]}$. Dla czytelności zbadamy je tylko w przypadku funkcji $f^1_{[x_1,x_2]}$, uzyskując wszystkie możliwe postacie pierwszej współrzędnej rzutu pionowego rozwiązania $\mathcal{I}([x_1, x_2], \cdot)$ równania (D-UU1) dla ustalonych $[x_1, x_2] \in L^I$.

(S1): $f^1_{[x_1,x_2]} = -\infty$.
Czyli

$$h_3 \circ pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [h_1^{-1}(u), h_1^{-1}(v)]) = -\infty, \qquad (u, v) \in L^{\overline{\infty}},$$

zatem

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [h_1^{-1}(u), h_1^{-1}(v)]) = 0, \qquad (u, v) \in L^{\overline{\infty}},$$

co oznacza, że

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = 0, \qquad [y_1, y_2] \in L^I.$$

(S2): $f^1_{[x_1,x_2]} = 0$.
To implikuje, że

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = e_2, \qquad [y_1, y_2] \in L^I.$$

(S3): $f^1_{[x_1,x_2]} = \infty$.
To implikuje, że

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = 1, \qquad [y_1, y_2] \in L^I.$$

(S4): $f^1_{[x_1,x_2]}(u, v) = \begin{cases} -\infty, & u = -\infty, \\ 0, & u > -\infty. \end{cases}$
To implikuje, że dla wszystkich $[y_1, y_2] \in L^I$

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = \begin{cases} 0, & y_1 = 0, \\ e_2, & y_1 > 0. \end{cases}$$

(S5): $f^1_{[x_1,x_2]}(u, v) = \begin{cases} -\infty, & v = -\infty, \\ 0, & v > -\infty. \end{cases}$
To implikuje, że dla wszystkich $[y_1, y_2] \in L^I$

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = \begin{cases} 0, & y_2 = 0, \\ e_2, & y_2 > 0. \end{cases}$$

(S6): $f^1_{[x_1,x_2]}(u,v) = \begin{cases} \infty, & u = -\infty, \\ 0, & u > -\infty. \end{cases}$

To implikuje, że dla wszystkich $[y_1, y_2] \in L^I$

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = \begin{cases} 1, & y_1 = 0, \\ e_2, & y_1 > 0. \end{cases}$$

(S7): $f^1_{[x_1,x_2]}(u,v) = \begin{cases} \infty, & v = -\infty, \\ 0, & v > -\infty. \end{cases}$

To implikuje, że dla wszystkich $[y_1, y_2] \in L^I$

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = \begin{cases} 1, & y_2 = 0, \\ e_2, & y_2 > 0. \end{cases}$$

(S8): $f^1_{[x_1,x_2]}(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u = -\infty, \\ \infty, & u > -\infty. \end{cases}$

To implikuje, że dla wszystkich $[y_1, y_2] \in L^I$

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = \begin{cases} 0, & y_1 = 0, \\ 1, & y_1 > 0. \end{cases}$$

(S9): $f^1_{[x_1,x_2]}(u,v) = \begin{cases} -\infty, & v = -\infty, \\ \infty, & v > -\infty. \end{cases}$

To implikuje, że dla wszystkich $[y_1, y_2] \in L^I$

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = \begin{cases} 0, & y_2 = 0, \\ 1, & y_2 > 0. \end{cases}$$

(S10): $f^1_{[x_1,x_2]}(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u \in \{-\infty, \infty\}, \\ \infty, & u \in \mathbb{R}. \end{cases}$

To implikuje, że dla wszystkich $[y_1, y_2] \in L^I$

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = \begin{cases} 0, & y_1 \in \{0,1\}, \\ 1, & y_1 \in (0,1). \end{cases}$$

(S11): $f^1_{[x_1,x_2]}(u,v) = \begin{cases} -\infty, & v \in \{-\infty, \infty\}, \\ \infty, & v \in \mathbb{R}. \end{cases}$

To implikuje, że dla wszystkich $[y_1, y_2] \in L^I$

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = \begin{cases} 0, & y_2 \in \{0,1\}, \\ 1, & y_2 \in (0,1). \end{cases}$$

(S12): $f^1_{[x_1,x_2]}(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u = -\infty \text{ lub } v = \infty, \\ \infty, & u, v \in \mathbb{R}. \end{cases}$

To implikuje, że dla wszystkich $[y_1, y_2] \in L^I$

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = \begin{cases} 0, & y_1 = 0 \text{ lub } y_2 = 1, \\ 1, & y_1, y_2 \in (0,1). \end{cases}$$

(S13): $f^1_{[x_1,x_2]}(u,v) = \begin{cases} -\infty, & v = -\infty, \\ 0, & u > -\infty, \\ \infty, & u = -\infty \text{ oraz } v > -\infty. \end{cases}$

To implikuje, że dla wszystkich $[y_1, y_2] \in L^I$

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = \begin{cases} 0, & y_2 = 0, \\ e_2, & y_1 > 0, \\ 1, & y_1 = 0 \text{ oraz } y_2 > 0. \end{cases}$$

Przez $c, c_1, c_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będziemy dalej oznaczać dowolne funkcje addytywne.

(S14): $f^1_{[x_1,x_2]}(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u \in \{-\infty, \infty\}, \\ c(u), & u \in \mathbb{R}. \end{cases}$

To implikuje, że

$$h_3 \circ pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1,x_2],[h_1^{-1}(u), h_1^{-1}(v)]) = \begin{cases} -\infty, & u \in \{-\infty, \infty\}, \\ c(u), & u \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad (u,v) \in L^{\overline{\infty}},$$

a zatem

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1,x_2],[h_1^{-1}(u), h_1^{-1}(v)]) = \begin{cases} h_3^{-1}(-\infty), & u \in \{-\infty, \infty\}, \\ h_3^{-1} \circ c(u), & u \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad (u,v) \in L^{\overline{\infty}}.$$

Dla $y_1, y_2 \in [0,1]$, takich że $u = h_1(y_1)$, $v = h_1(y_2)$ (stąd $y_1 \leqslant y_2$), mamy

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = \begin{cases} 0, & y_1 \in \{0,1\}, \\ h_3^{-1} \circ c \circ h_1(y_1), & y_1 \in (0,1), \end{cases} \qquad [y_1,y_2] \in L^I.$$

(S15): $f^1_{[x_1,x_2]}(u,v) = \begin{cases} -\infty, & v \in \{-\infty, \infty\}, \\ c(v), & v \in \mathbb{R}. \end{cases}$

To implikuje, że dla wszystkich $[y_1, y_2] \in L^I$

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = \begin{cases} 0, & y_2 \in \{0,1\}, \\ h_3^{-1} \circ c \circ h_1(y_2), & y_2 \in (0,1). \end{cases}$$

(S16): $f^1_{[x_1,x_2]}(u,v) = \begin{cases} \infty, & u \in \{-\infty, \infty\}, \\ c(u), & u \in \mathbb{R}. \end{cases}$

To implikuje, że dla wszystkich $[y_1, y_2] \in L^I$

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = \begin{cases} 1, & y_1 \in \{0, 1\}, \\ h_3^{-1} \circ c \circ h_1(y_1), & y_1 \in (0, 1). \end{cases}$$

(S17): $f^1_{[x_1,x_2]}(u, v) = \begin{cases} \infty, & v \in \{-\infty, \infty\}, \\ c(v), & v \in \mathbb{R}. \end{cases}$

To implikuje, że dla wszystkich $[y_1, y_2] \in L^I$

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = \begin{cases} 1, & y_2 \in \{0, 1\}, \\ h_3^{-1} \circ c \circ h_1(y_2), & y_2 \in (0, 1). \end{cases}$$

(S18): $f^1_{[x_1,x_2]}(u, v) = \begin{cases} -\infty, & u = -\infty, \\ c(u), & u \in \mathbb{R}, \\ \infty, & u = \infty. \end{cases}$

To implikuje, że dla wszystkich $[y_1, y_2] \in L^I$

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = \begin{cases} 0, & y_1 = 0, \\ h_3^{-1} \circ c \circ h_1(y_1), & y_1 \in (0, 1), \\ 1, & y_1 = 1. \end{cases}$$

(S19): $f^1_{[x_1,x_2]}(u, v) = \begin{cases} -\infty, & v = -\infty, \\ c(v), & v \in \mathbb{R}, \\ \infty, & v = \infty. \end{cases}$

To implikuje, że dla wszystkich $[y_1, y_2] \in L^I$

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = \begin{cases} 0, & y_2 = 0, \\ h_3^{-1} \circ c \circ h_1(y_2), & y_2 \in (0, 1), \\ 1, & y_2 = 1. \end{cases}$$

(S20): $f^1_{[x_1,x_2]}(u, v) = \begin{cases} -\infty, & v = -\infty, \\ c(u), & u \in \mathbb{R}, \\ \infty, & (u = -\infty \text{ oraz } v > -\infty) \text{ lub } u = \infty. \end{cases}$

To implikuje, że dla wszystkich $[y_1, y_2] \in L^I$

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = \begin{cases} 0, & y_2 = 0, \\ h_3^{-1} \circ c \circ h_1(y_1), & y_1 \in (0, 1), \\ 1, & (y_1 = 0 \text{ oraz } y_2 > 0) \text{ lub } y_1 = 1. \end{cases}$$

(S21): $f^1_{[x_1,x_2]}(u, v) = \begin{cases} -\infty, & u = -\infty \text{ lub } v = \infty, \\ c_1(u) + c_2(v), & u, v \in \mathbb{R}. \end{cases}$

To implikuje, że

$$h_3 \circ pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [h_1^{-1}(u), h_1^{-1}(v)]) = \begin{cases} -\infty, & u = -\infty \text{ lub } v = \infty, \\ c_1(u) + c_2(v), & u, v \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dla $(u, v) \in L^{\overline{\infty}}$. Zatem

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [h_1^{-1}(u), h_1^{-1}(v)]) = \begin{cases} h_3^{-1}(-\infty), & u = -\infty \text{ lub } v = \infty, \\ h_3^{-1}(c_1(u) + c_2(v)), & u, v \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dla $(u, v) \in L^{\overline{\infty}}$. Dalej, dla $y_1, y_2 \in [0, 1]$, takich że $u = h_1(y_1), v = h_1(y_2)$ (stąd $y_1 \leqslant y_2$), mamy

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = \begin{cases} 0, & y_1 = 0 \text{ lub } y_2 = 1, \\ h_3^{-1}[c_1(h_1(y_1)) + c_2(h_1(y_2))], & y_1, y_2 \in (0, 1), \end{cases}$$

dla $[y_1, y_2] \in L^I$.

(S22): $f^1_{[x_1,x_2]}(u, v) = \begin{cases} \infty, & u = -\infty \text{ lub } v = \infty, \\ c_1(u) + c_2(v), & u, v \in \mathbb{R}. \end{cases}$

To implikuje, że dla wszystkich $[y_1, y_2] \in L^I$

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = \begin{cases} 1, & y_1 = 0 \text{ lub } y_2 = 1, \\ h_3^{-1}[c_1(h_1(y_1)) + c_2(h_1(y_2))], & y_1, y_2 \in (0, 1). \end{cases}$$

(S23): $f^1_{[x_1,x_2]}(u, v) = \begin{cases} -\infty, & u = -\infty, \\ c_1(u) + c_2(v), & u, v \in \mathbb{R}, \\ \infty, & u > -\infty \text{ oraz } v = \infty. \end{cases}$

To implikuje, że dla wszystkich $[y_1, y_2] \in L^I$

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = \begin{cases} 0, & y_1 = 0, \\ h_3^{-1}[c_1(h_1(y_1)) + c_2(h_1(y_2))], & y_1, y_2 \in (0, 1), \\ 1, & y_1 > 0 \text{ oraz } y_2 = 1. \end{cases}$$

(S24): $f^1_{[x_1,x_2]}(u, v) = \begin{cases} -\infty, & v = -\infty, \\ c_1(u) + c_2(v), & u, v \in \mathbb{R}, \\ \infty, & (u = -\infty \text{ oraz } v > -\infty) \text{ lub } v = \infty. \end{cases}$

To implikuje, że dla wszystkich $[y_1, y_2] \in L^I$

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = \begin{cases} 0, & y_2 = 0, \\ h_3^{-1}[c_1(h_1(y_1)) + c_2(h_1(y_2))], & y_1, y_2 \in (0, 1), \\ 1, & (y_1 = 0 \text{ oraz } y_2 > 0) \text{ lub } y_2 = 1. \end{cases}$$

$$(S25):\ f^1_{[x_1,x_2]}(u,v) = \begin{cases} -\infty, & u \in \{-\infty, \infty\}, \\ c_1(u) + c_2(v), & u, v \in \mathbb{R}, \\ \infty, & u \in \mathbb{R} \text{ oraz } v = \infty. \end{cases}$$

To implikuje, że dla wszystkich $[y_1, y_2] \in L^I$

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = \begin{cases} 0, & y_1 \in \{0, 1\}, \\ h_3^{-1}[c_1(h_1(y_1)) + c_2(h_1(y_2))], & y_1, y_2 \in (0, 1), \\ 1, & y_1 \in (0, 1) \text{ oraz } y_2 = 1. \end{cases}$$

$$(S26):\ f^1_{[x_1,x_2]}(u,v) = \begin{cases} -\infty, & v \in \{-\infty, \infty\}, \\ c_1(u) + c_2(v), & u, v \in \mathbb{R}, \\ \infty, & u = -\infty \text{ oraz } v \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

To implikuje, że dla wszystkich $[y_1, y_2] \in L^I$

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = \begin{cases} 0, & y_2 \in \{0, 1\}, \\ h_3^{-1}[c_1(h_1(y_1)) + c_2(h_1(y_2))], & y_1, y_2 \in (0, 1), \\ 1, & y_1 = 0 \text{ oraz } y_2 \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Oczywiście dokładnie te same rozwiązania uzyskujemy dla $pr_2 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], \cdot\,)$, drugiej współrzędnej przekroju pionowego $\mathcal{I}$. Naturalnie nie wszystkie z 676 kombinacji powyższych rozwiązań mają poprawną wartość w L^I. Na przykład jeśli

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], \cdot\,) = 0 \quad \text{oraz} \quad pr_2 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], \cdot\,) = 1,$$

dla pewnych $[x_1, x_2] \in L^I$, wtedy nasze (stałe) rozwiązanie $\mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = [0, 1]$ jest poprawne w $\mathcal{L}^I$. Ale jeśli dla pewnych $[x_1, x_2] \in L^I$ zachodzi

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = e_2 \quad \text{oraz} \quad pr_2 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = \begin{cases} 0, & y_1 \in \{0, 1\}, \\ e_2, & y_1 \in (0, 1), \end{cases}$$

dla $[y_1, y_2] \in L^I$, wtedy nasze rozwiązanie nie jest poprawne w $\mathcal{L}^I$, ponieważ $\mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = [e_2, 0] \notin L^I$ dla $y_1 = 0$ oraz dowolnego $y_2 \in [0, 1]$.

Uwaga 4.8. Warto także zauważyć, że oczywiście nie wszystkie zaprezentowane rozwiązania mogą być którąkolwiek współrzędną przekroju pionowego $\mathcal{I}$, jeśli $\mathcal{I}$ jest implikacją rozmytą. Na przykład, gdy

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = \begin{cases} 1, & y_2 = 0, \\ e_2, & y_2 > 0, \end{cases} \qquad [y_1, y_2] \in L^I,$$

dla pewnych ustalonych $[x_1, x_2] \in L^I$ (rozwiązanie to odpowiada (S7)), wówczas $\mathcal{I}$ nie jest rosnąca ze względu na drugą zmienną, więc nie jest implikacją rozmytą.

Przypomnijmy (porównaj z definicją 1.37 oraz uwagą 1.38), że $\mathcal{I}$ jest implikacją rozmytą na $\mathcal{L}^I$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest malejąca ze względu na pierwszą zmienną, rosnąca ze względu na drugą zmienną oraz spełnia kilka warunków brzegowych: $\mathcal{I}(0_{\mathcal{L}^I}, 0_{\mathcal{L}^I}) = \mathcal{I}(1_{\mathcal{L}^I}, 1_{\mathcal{L}^I}) = \mathcal{I}(0_{\mathcal{L}^I}, 1_{\mathcal{L}^I}) = 1_{\mathcal{L}^I}$ i $\mathcal{I}(1_{\mathcal{L}^I}, 0_{\mathcal{L}^I}) = 0_{\mathcal{L}^I}$. Ponadto $\mathcal{I}$ spełnia

$$\mathcal{I}(0_{\mathcal{L}^I}, y) = 1_{\mathcal{L}^I}, \qquad y \in L \quad \text{(LB)}, \qquad\qquad \mathcal{I}(x, 1_{\mathcal{L}^I}) = 1_{\mathcal{L}^I}, \qquad x \in L \quad \text{(RB)}.$$

Stąd wynika kilka warunków, które musi spełniać funkcja $g_{[x_1,x_2]}\colon \mathcal{L}^I \to [0,1]$, aby być rzutem na którąś współrzędną przekroju pionowego implikacji rozmytej $\mathcal{I}$ dla ustalonych $[x_1, x_2] \in L^I$ (czyli $g_{[x_1,x_2]}(\cdot) = pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], \cdot)$ lub $g_{[x_1,x_2]}(\cdot) = pr_2 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], \cdot)$):

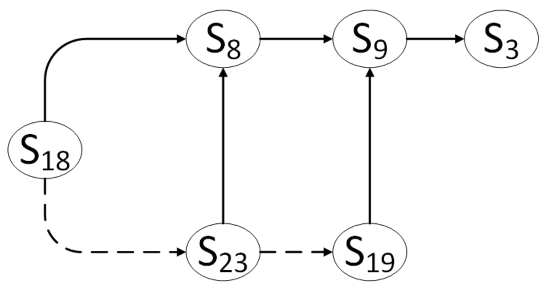
- $g_{[x_1,x_2]}$ jest rosnąca;
- $g_{[x_1,x_2]}([1, 1]) = 1$;
- $g_{[0,0]} = 1$;
- $g_{[1,1]}([0, 0]) = 0$.

Zatem dla $[x_1, x_2] \in L^I/\{[0, 0], [1, 1]\}$ dokładnie sześciu spośród dwudziestu sześciu rozwiązań (S1) - (S26) może prowadzić do funkcji $g_{[x_1,x_2]}$ spełniającej powyższe warunki: (S3), (S8), (S9), (S18), (S19), (S23). Dla $[x_1, x_2] = [1, 1]$ z tego zbioru należy wyłączyć rozwiązanie (S3). Natomiast dla $[x_1, x_2] = [0, 0]$ właśnie to rozwiązanie prowadzi do jedynej funkcji $g_{[0,0]} = 1$.

Uwaga 4.9. Co więcej, ponieważ $\mathcal{L}^I$ jest przeciwdziedziną implikacji rozmytej $\mathcal{I}$, musi zachodzić następująca nierówność:

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) \leqslant pr_2 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2]),$$

dla wszystkich $[x_1, x_2], [y_1, y_2] \in L^I$. Dlatego nie wszystkie kombinacje sześciu rozwiązań wymienionych w Uwadze 4.8 mogą być jednocześnie dwiema współrzędnymi tego samego przekroju pionowego $\mathcal{I}$. Na rysunku 4.2 zaprezentowane są relacje mniejszości pomiędzy sześcioma rozwiązaniami (S3), (S8), (S9), (S18), (S19), (S23).



Rysunek 4.2: Relacje mniejszości pomiędzy sześć rozwiązaniami (S3), (S8), (S9), (S18), (S19), (S23).

Ciągła strzałka pomiędzy dwoma rozwiązaniami oznacza, że pierwsze jest mniejsze bądź równe od drugiego, do którego ta strzałka jest skierowana. Natomiast strzałka narysowana przerywaną linią oznacza, że pierwsze rozwiązanie może być mniejsze bądź równe od drugiego, o ile pewne dodatkowe warunki zostaną spełnione (dotyczą one zależności pomiędzy funkcjami c, c_1, c_2 występującymi we wzorach rozwiązań (S18), (S19) i (S23): na przykład (S23) $\leqslant$ (S19), gdy $c_1 = 0$ oraz $c_2 \leqslant c$). Obie te relacje są przechodnie. Zatem dla ustalonego $[x_1, x_2] \in L^I/\{[0, 0], [1, 1]\}$ możliwych jest dokładnie dwadzieścia kombinacji funkcji, które będą odpowiadać dwóm współrzędnym rzutu pionowego $\mathcal{I}([x_1, x_2], \cdot)$.

Przykład 4.10. Niech $\mathcal{I}\colon (\mathcal{L}^I)^2 \to \mathcal{L}^I$ będzie taka, że dla wszystkich $[x_1, x_2] \in L^I/\{[0, 0]\}$ oraz $[y_1, y_2] \in L^I$ zachodzi

$$pr_1 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = \begin{cases} 0, & y_1 = 0, \\ 1, & y_1 > 0, \end{cases} \qquad pr_2 \circ \mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = \begin{cases} 0, & y_2 = 0, \\ 1, & y_2 > 0, \end{cases}$$

czyli rzut na pierwszą współrzędną przekroju pionowego $\mathcal{I}$ odpowiada rozwiązaniu (S8), a na drugą współrzędną rozwiązaniu (S9). Dla $[x_1, x_2] = [0, 0]$ oczywiście niech oba rzuty będą równe stale 1. Zatem

$$\mathcal{I}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = \begin{cases} [0,0], & x_2 > 0, y_2 = 0, \\ [0,1], & x_2 > 0, y_1 = 0, y_2 > 0, \\ [1,1], & x_2 = 0 \text{ lub } x_2 > 0, y_1 > 0, \end{cases} \qquad [x_1, x_2], [y_1, y_2] \in L^I.$$

Funkcja $\mathcal{I}$ spełnia równanie (D-UU1) z dowolnymi koniunkcyjnymi uninormami rozkładalnymi $\mathcal{U}_1 = (U_1, U_1)$ oraz $\mathcal{U}_2 = (U_3, U_3)$, gdzie U_1, U_3 są uninormami reprezentowalnymi na $([0, 1], \leqslant)$ oraz na przeciwdziedzinach ich generatorów kładziemy założenie $(A-)$. Łatwo również sprawdzić, że $\mathcal{I}$ jest implikacją rozmytą na $\mathcal{L}^I$.

Rozdział 5

O równaniu $I(x, S(y, z)) = S(I(x, y), I(x, z))$ dla R-implikacji

W tym rozdziale rozważamy równanie rozdzielności

$$I(x, S(y, z)) = S(I(x, y), I(x, z)), \qquad x, y, z \in [0, 1], \tag{5.1}$$

dla funkcji $I, S\colon [0, 1]^2 \to [0, 1]$, gdzie I jest R-implikacją otrzymaną z t-normy ścisłej. O funkcji S będziemy najczęściej zakładali, że jest t-konormą, ale w niektórych naszych wynikach osłabimy to założenie. W 2004 roku B. Jayaram (pod nazwiskiem Balasubramaniam) wraz z C.J.M Rao [26] rozwiązali to równanie w przypadku I będącej S-implikacją lub R-implikacją otrzymaną z t-normy nilpotentnej oraz S będącej t-konormą, uzyskując następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.1 (por. Jayaram et al. [26, Theorem 4])**.** *Para funkcji $I, S\colon [0, 1]^2 \to [0, 1]$, gdzie I jest S-implikacją lub R-implikacją otrzymaną z t-normy nilpotentnej oraz S jest t-konormą ciągłą, spełnia równanie* (5.1) *wtedy i tylko wtedy, gdy $S = \max$.*

Twierdzenie to jest prawdziwe również bez założenia ciągłości t-konormy S i nie wymaga tak naprawdę żadnych zmian w dowodzie, który opiera się na znanym fakcie, że jedyną t-konormą idempotentną jest t-konorma maksimum. Przypadek I będącej R-implikacją otrzymaną z t-normy ścisłej nie został wówczas rozwiązany, ale skomentowano go w [26] następująco:

> *„Even though the proof (...) has been given for the case where the R-implication was obtained from a nilpotent t-norm, the authors have a strong feeling that it holds for the case when the R-implication is obtained from a strict t-norm, and that Theorem 4 will hold for any R-implication.”*
> *(Pomimo że dowód (...) został uzyskany w przypadku, gdy R-implikacja była otrzymana z t-normy nilpotentnej, autorzy mają silne przeczucie, że będzie on działał również w przypadku R-implikacji otrzymanej z t-normy ścisłej i że twierdzenie 5.1 będzie prawdziwe dla dowolnej R-implikacji).*

Tym razem intuicja autorów okazała się niesłuszna i w 2009 roku B. Jayaram wraz z M. Baczyńskim [19] udowodnili przytoczone niżej wyniki wskazujące, że w przypadku R-implikacji otrzymanych z t-norm ścisłych równanie (5.1) ma znacznie więcej rozwiązań niż tylko $S = S_M = \max$.

Lemat 5.2 (Baczyński et al. [19, Corollary 9]). *Niech S będzie ciągłą i archimedesową t-konormą oraz niech I będzie R-implikacją generowaną z pewnej t-normy ciągłej lewostronnie. Jeżeli para funkcji S, I spełnia równanie funkcyjne* (5.1) *dla wszystkich $x, y, z \in [0, 1]$, to S jest nilpotentna.*

Twierdzenie 5.3 (Baczyński et al. [19, Theorem 17]). *Dla t-konormy nilpotentnej S oraz R-implikacji I generowanej z t-normy ścisłej następujące zdania są równoważne:*

1. *Para funkcji S, I spełnia równanie funkcyjne* (5.1) *dla wszystkich $x, y, z \in [0, 1]$.*
2. *Istnieje takie $\varphi \in \Phi$, które jest wyznaczone jednoznacznie, że S jest postaci* (1.3) *z funkcją φ jako ciągłym, addytywnym generatorem oraz I jest postaci* (1.5) *z tą samą funkcją φ jako generatorem.*

Lemat 5.2 oraz twierdzenie 5.3 charakteryzują łącznie wszystkie rozwiązania równania rozdzielności (5.1), gdy I jest R-implikacją otrzymaną z t-normy ścisłej oraz S jest t-konormą ciągłą i archimedesową. Przypadek, gdy S jest t-konormą, ale nie jest ścisła ani nilpotentna, pozostał nierozwiązany.

W podrozdziale 5.2 rozwiążemy równanie (5.1), gdy I jest R-implikacją otrzymaną z t-normy ścisłej, natomiast S należy do szerszej rodziny funkcji, w szczególności zawierającej wszystkie t-konormy (będzie to twierdzenie 5.8). Dokładniej, S będzie funkcją symetryczną, rosnącą oraz posiadającą element neutralny zero. Nie będziemy zakładali łączności funkcji S, która jest potrzebna, żeby była ona t-konormą. Dowód twierdzenia 5.3 silnie wykorzystywał reprezentację (1.3) funkcji nilpotentnej S, czego oczywiście nie będziemy mogli teraz uczynić, zatem dowód nowego twierdzenia 5.8 przeprowadzony jest w zupełnie inny sposób.

W dalszej części podrozdziału 5.2 wskażemy kilka przykładów nowych rozwiązań równania (5.1), które nie są t-konormami nilpotentnymi – a wśród nich takie, które są t-konormami, i takie, które nimi nie są. Następnie wykażemy, że z nowego twierdzenia 5.8 można wywnioskować tezę twierdzenia 5.3 (a to oznacza, że nowe wyniki faktycznie uogólniają dotychczasowe rezultaty) wtedy i tylko wtedy, gdy jedynymi rozwiązaniami równania:

$$h(\min(xg(y), 1)) = \min(h(x) + h(xy), 1), \tag{Hmin}$$

gdzie $x \in (0, 1)$, $y \in (0, 1]$, wśród funkcji rosnących $g\colon (0, 1] \to [1, \infty)$ oraz rosnących bijekcji $h\colon [0, 1] \to [0, 1]$, są pary funkcji postaci $h(x) = x^p$ oraz $g(y) = (1 + y^p)^{\frac{1}{p}}$, dla pewnej dodatniej liczby rzeczywistej p.

W tym celu w pierwszym podrozdziale 5.1 rozwiążemy równanie (Hmin), zakładając nieco mniej o funkcjach g i h. Wcześniej w tym samym podrozdziale będziemy badali podobne równanie funkcyjne:

$$h(xg(y)) = h(x) + h(xy), \tag{H}$$

gdzie $g, h\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ oraz funkcja h jest ciągła lub jest bijekcją. Zauważymy w tym miejscu podobieństwo powyższego równania do badanego przez M. E. Kuczmę [55], J. Sikorską [69, 70] oraz N. Brillouët-Belluot [31] od roku 1993 równania

$$v + H(u + G(v)) = u + H(v + G(u)), \tag{5.2}$$

dla $G, H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Wszystkie wyniki przedstawione w tym rozdziale są nowe i zostały uzyskane przez Autorkę we współpracy z M. E. Kuczmą, R. Gerem oraz M. Baczyńskim w roku 2015. Nie były dotąd publikowane.

5.1 O równaniu $h(xg(y)) = h(x) + h(xy)$

W niniejszym podrozdziale przedstawimy dwa twierdzenia charakteryzujące rozwiązania równania funkcyjnego (H) dla $g, h\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, najpierw wśród funkcji h będących bijekcjami, a następnie wśród funkcji ciągłych h. Okazuje się, że w obu tych rodzinach funkcji jedyne rozwiązania h są postaci $h(x) = x^p$, $x \in (0,\infty)$, dla pewnej stałej $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$. Twierdzenie 5.4 zostało udowodnione przez R. Gera, natomiast twierdzenie 5.6 przez M. E. Kuczmę w trakcie dyskusji nad równaniem (H) prowadzonych z Autorką wiosną 2015. Kolejno zaprezentujemy lemat 5.7 charakteryzujący rozwiązania równania (Hmin), który będzie bezpośrednio wykorzystany w dowodzie wniosku 5.11 w podrozdziale 5.2. Dowody twierdzenia 5.6 oraz lematu 5.7 są zbliżone, jednak ze względu na wagę lematu dla dalszych wyników przydatne będzie umieszczenie obu tych w dowodów w niniejszej pracy. Podkreślamy, że żaden z wyników zawartych w tym podrozdziale nie został dotąd opublikowany.

Twierdzenie 5.4 (R. Ger – notatki niepublikowane/prywatna korespondencja)**.** *Niech para funkcji $g, h\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ spełnia równanie* (H)*, tj.*

$$h(xg(y)) = h(x) + h(xy),$$

dla wszystkich $x, y \in (0,\infty)$. Jeżeli h jest odwzorowaniem bijektywnym, to istnieje taka dodatnia stała rzeczywista M oraz taka bijekcja $c\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, że

$$c(xy) = c(x)c(y), \qquad x, y \in (0,\infty),$$

oraz

$$h(x) = Mc(x),\ \ g(x) = c^{-1}(1 + c(x)), \qquad x \in (0,\infty).$$

Na odwrót, każda taka para funkcji g, h spełnia równanie (H)*.*

W szczególności, jeśli funkcja h jest ciągłym rozwiązaniem bijektywnym równania (H)*, to*

$$h(x) = Mx^p, \qquad x \in (0,\infty),$$

oraz

$$g(x) = (1 + x^p)^{\frac{1}{p}}, \qquad x \in (0,\infty)$$

gdzie p jest pewną stałą rzeczywistą.

Dowód. Mamy

$$xg(y) = h^{-1}(h(x) + h(xy)), \qquad x, y \in (0,\infty),$$

lub, równoważnie,

$$xg(\frac{y}{x}) = h^{-1}(h(x) + h(y)), \qquad x, y \in (0,\infty).$$

W rezultacie, dla wszystkich $\lambda \in (0,\infty)$, dostajemy

$$\lambda h^{-1}(h(x) + h(y)) = \lambda xg(\frac{y}{x}) = \lambda xg(\frac{\lambda y}{\lambda x}) = h^{-1}(h(\lambda x) + h(\lambda y)),$$

dla wszystkich $x, y \in (0,\infty)$. W konsekwencji

$$h(\lambda h^{-1}(h(x) + h(y))) = h(\lambda x) + h(\lambda y), \qquad x, y, \lambda \in (0,\infty),$$

i wstawiając tutaj $h^{-1}(x)$ w miejsce x oraz $h^{-1}(y)$ w miejsce y, otrzymujemy

$$H_\lambda(x+y) = H_\lambda(x) + H_\lambda(y), \qquad x, y, \lambda \in (0,\infty),$$

gdzie $H_\lambda(x) := h(\lambda h^{-1}(x))$, $x \in (0,\infty)$. Ponieważ funkcja h jest dodatnia, takimi też są addytywne funkcje H_λ. Tym samym funkcje H_λ są ciągłe (jako ograniczone z dołu), co implikuje, że

$$h(\lambda h^{-1}(x)) = H_\lambda(x) = c(\lambda)x, \qquad x, \lambda \in (0,\infty),$$

więc

$$h(\lambda x) = c(\lambda)h(x), \qquad x, \lambda \in (0,\infty).$$

Przyjmując teraz $M := h(1) > 0$, dostajemy równości

$$h(\lambda) = Mc(\lambda),\ \ \lambda \in (0,\infty), \qquad \text{oraz} \qquad c(\lambda)c(x) = c(\lambda x),\ \ x, \lambda \in (0,\infty).$$

Oczywiście funkcja c jest bijektywna, bo taka jest funkcja h. Wstawienie otrzymanej postaci funkcji h do równania (H) daje natychmiast postać funkcji g:

$$g(y) = c^{-1}(1 + c(y)), \qquad y \in (0,\infty).$$

Ponadto jeśli funkcja h jest ciągłą bijekcją, wówczas również funkcja c jest ciągła, co wraz z multyplikatywnością c prowadzi do następującej postaci tej funkcji ([53, Theorem XIII.1.6]):

$$c(x) = x^p, \qquad x \in (0,\infty),$$

gdzie p jest pewną stałą rzeczywistą. A stąd

$$h(x) = Mx^p, \qquad p \in (0,\infty),$$

oraz

$$g(x) = (1 + x^p)^{\frac{1}{p}},\ \ x \in (0,\infty)$$

Na odwrót, jeśli c jest taka bijekcją półprostej $(0,\infty)$ na siebie, że

$$c(xy) = c(x)c(y), \qquad x, y \in (0,\infty),$$

oraz

$$h(x) = Mc(x),\ \ g(x) = c^{-1}(1 + c(x)), \qquad x \in (0,\infty),$$

dla pewnej dodatniej liczby rzeczywistej M, to oczywiście para funkcji g, h spełnia równanie (H) dla dowolnych $x, y \in (0,\infty)$, mianowicie

$$h(xg(y)) = Mc(xg(y)) = Mc(x)c(g(y)) = Mc(x)(1 + c(y)) = Mc(x) + Mc(xy) = h(x) + h(xy).$$

$\square$

Zanim przedstawimy twierdzenie charakteryzujące rozwiązania równania (H) wśród funkcji ciągłych (twierdzenie 5.6), udowodnimy prosty wynik dotyczący gęstości pewnego zbioru w przedziale $[0,1]$. Fakt ten wykorzystamy w dowodach twierdzenia 5.6 oraz lematu 5.7.

Lemat 5.5. *Niech α będzie liczbą niewymierną. Wówczas zbiór $\{\mathbf{m}(n\alpha) \mid n \in \mathcal{N}\}$, gdzie $\mathbf{m}(x) = x \bmod 1$, $x \in \mathbb{R}$, jest gęsty w przedziale $[0,1]$.*

Dowód. Pokażemy, że każdy punkt odcinka $[0,1]$ jest punktem skupienia ciągu $\alpha_n := \mathbf{m}(n\alpha)$. W tym celu udowodnimy, że w każdym przedziale domkniętym wewnątrz odcinka $[0,1]$ zawartych jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{\alpha_n\}$.

Niech zatem $[a,b] \subset (0,1)$, $a < b$, będzie takim dowolnym przedziałem dokmniętym. Ponieważ ciąg $\{\alpha_n\}$ jest ograniczony, na mocy klasycznego twierdzenia Bolzano-Weierstrassa możemy wybrać jego podciąg zbieżny. Z własności ciągu Cauchy'ego otrzymujemy istnienie takich $k, l \in \mathcal{N}$, $k < l$, że $|\alpha_k - \alpha_l| = \delta < b - a$. Zauważmy, że ciąg $\{\alpha_n\}$ jest także różnowartościowy – w przeciwnym wypadku istniałyby takie $k_1, k_2 \in \mathcal{N}$, $k_1 \neq k_2$, że $\alpha_{k_1} = \alpha_{k_2}$, co jest równoważne temu, że $(k_1 - k_2) \cdot \alpha \in \mathbb{Z}$, skąd $\alpha \in \mathbb{Z}$, a to jest sprzeczność. Z różnowartościowości ciągu $\{\alpha_n\}$ wynika, że δ jest różne od zera, czyli $\delta \in (0, b-a)$. Oznaczmy $d = l - k$.

Jeżeli $\alpha_k > \alpha_l$, to $\delta = \alpha_k - \alpha_l$ i zauważmy, że

$$\delta = \mathbf{m}(\delta) = \mathbf{m}(\alpha_k - \alpha_l) = \mathbf{m}(k\alpha - l\alpha) = \mathbf{m}(-d\alpha) = 1 - \mathbf{m}(d\alpha) = 1 - \alpha_d.$$

Weźmy teraz $s = \lfloor \frac{1-a}{\delta} \rfloor$, czyli $s \in \left(\frac{1-a}{\delta} - 1, \frac{1-a}{\delta} \right]$, a stąd

$$1 - b < 1 - (a + \delta) < s\delta \leqslant 1 - a.$$

Ponieważ $1 - b, 1 - a \in [0,1)$, to również $s\delta \in [0,1)$, czyli $s\delta = \mathbf{m}(s\delta)$ oraz

$$1 - b < \mathbf{m}(s\delta) \leqslant 1 - a.$$

Następnie zauważmy, że

$$\alpha_{sd} = \mathbf{m}(sd\alpha) = \mathbf{m}(s\alpha_d) = \mathbf{m}(s(1-\delta)) = \mathbf{m}(-s\delta) = 1 - \mathbf{m}(s\delta).$$

Z uzyskanego chwilę wcześniej oszacowania na $\mathbf{m}(s\delta)$ uzyskujemy zatem, że $\alpha_{sd} \in [a,b)$. Znaleźliśmy więc element ciągu $\{\alpha_n\}$, który zawarty jest w przedziale domkniętym $[a,b]$.

Podobnie jeśli $\alpha_k < \alpha_l$, to $\delta = \alpha_l - \alpha_k$ i dostajemy, że

$$\delta = \mathbf{m}((l-k)\alpha) = \alpha_d.$$

Tym razem ustalamy $s = \lfloor \frac{b}{\delta} \rfloor$, czyli $s \in \left(\frac{b}{\delta} - 1, \frac{b}{\delta} \right]$. Stąd $a < b - \delta < s\delta \leqslant b$, a następnie $s\delta = \mathbf{m}(s\delta)$ oraz $a < \mathbf{m}(s\delta) \leqslant b$. Zatem

$$\alpha_{sd} = \mathbf{m}(s\alpha_d) = \mathbf{m}(s\delta) \in (a,b],$$

więc i tym razem znaleźliśmy element ciągu $\{\alpha_n\}$, który zawarty jest w przedziale domkniętym $[a,b]$.

Wreszcie skoro w przedziale $[a,b]$ zawarty jest jeden wyraz α_{sd} ciągu $\{\alpha_n\}$, to zawartych jest w nim również nieskończenie wiele innych wyrazów tego ciągu. Możemy bowiem wskazać niepusty domknięty przedział wewnątrz zbioru $[a,b] \setminus \{\alpha_{sd}\}$, w którym także znajdziemy pewien element ciągu $\{\alpha_n\}$. Krok ten możemy powtarzać nieskończenie wiele razy. W ten sposób skończyliśmy dowód lematu. $\square$

Twierdzenie 5.6 (M. E. Kuczma – notatki niepublikowane/prywatna korespondencja)**.** *Niech para funkcji $g, h\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ spełnia równanie* (H)*, tj.*

$$h(xg(y)) = h(x) + h(xy),$$

dla wszystkich $x, y \in (0,\infty)$. Jeżeli h jest ciągła, to $h(x) = Mx^p$ oraz $g(x) = (1 + x^p)^{\frac{1}{p}}$ dla pewnych stałych $M > 0$, $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$.

Na odwrót, każda taka para funkcji g, h spełnia równanie (H)*.*

Dowód. Jest jasne, że $g(1) \neq 1$. W przeciwnym razie mielibyśmy $h(x) = 2h(x)$ dla $x \in (0, \infty)$, wbrew temu, że $h > 0$. Niech zatem $p := 1/\lg g(1)$, gdzie przez lg oznaczamy logarytm przy postawie 2 (teraz oraz w całym dowodzie twierdzenia 5.6). Przyjmijmy

$$h(x) = x^p \cdot k(x), \qquad x \in (0, \infty),$$

z wykładnikiem p określonym przed chwilą oraz pewną funkcją $k\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$. Wykażemy, że k jest stała. Równanie (H) przyjmuje zatem postać

$$g(y)^p \cdot k(xg(y)) = k(x) + y^p \cdot k(xy), \qquad x, y \in (0, \infty).$$

Podstawiając $x = 2^{t/p}$, możemy zapisać powyższe równanie w następującej formie:

$$g(y)^p \cdot k(2^{(t+p\lg g(y))/p}) = k(2^{t/p}) + y^p \cdot k(2^{(t+p\lg y)/p}), \qquad t \in \mathbb{R},\ y \in (0, \infty).$$

Zdefiniujmy jeszcze jedną funkcją, $f(t) := k(2^{t/p})$ dla $t \in \mathbb{R}$, i zapiszmy ponownie nasze równanie:

$$g(y)^p \cdot f(t + p\lg g(y)) = f(t) + y^p \cdot f(t + p\lg y), \qquad t \in \mathbb{R},\ y \in (0, \infty). \tag{5.3}$$

Pamiętamy, że $p\lg g(1) = 1$ i stąd $g(1)^p = 2$. Wstawiając $y = 1$ do równania powyżej, otrzymujemy więc zależność

$$f(t + 1) = f(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Zatem f jest ciągłą funkcją okresową, o okresie 1. Wykażemy, że jest to funkcja stała.

Ustalmy dowolną liczbę niewymierną r. Przyjmijmy

$$y_0 := g(1)^r, \qquad q := p\lg g(y_0); \qquad \text{wtedy } g(y_0) = 2^{\frac{q}{p}}, \qquad y_0^p = 2^r, \qquad p\lg y_0 = r.$$

Wstawiając teraz $y = y_0$ do (5.3), otrzymujemy

$$2^q \cdot f(t + q) = f(t) + 2^r \cdot f(t + r), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{5.4}$$

Funkcja ciągła okresowa f osiąga swoje kresy. Niech M będzie kresem górnym f, a m kresem dolnym f, gdzie $m, M \in (0, \infty)$. Następnie niech a oraz b będą dowolnymi punktami na osi rzeczywistej, w których $f(a) = M$, $f(b) = m$. Podstawmy w równaniu (5.4) kolejno $t = a - q$, $t = b - q$:

$$2^q \cdot M = 2^q \cdot f(a) = f(a - q) + 2^r \cdot f(a - q + r) \leqslant M + 2^r \cdot M, \qquad \text{skąd} \qquad 2^q \leqslant 1 + 2^r,$$
$$2^q \cdot m = 2^q \cdot f(b) = f(b - q) + 2^r \cdot f(b - q + r) \geqslant m + 2^r \cdot m, \qquad \text{skąd} \qquad 2^q \geqslant 1 + 2^r.$$

Zatem $2^q = 1 + 2^r$, co oznacza, że w powyższych nierównościach prawe strony są równe lewym i we wszystkich oszacowaniach muszą występować równości. W szczególności zachodzi $f(a - q) = f(a - q + r) = M$.

Zauważmy, że co najmniej jedna z liczb $-q$, $r - q$ jest niewymierna, nazwijmy ją δ. Zostało już wykazane, że jeśli $f(a) = M$, to także $f(a + \delta) = M$. W konsekwencji $f(a + n\delta) = M$ dla wszystkich $n \in \mathcal{N}$. Lemat 5.5 prowadzi do wniosku, że zbiór $\{(a + n\delta) \bmod 1 \mid n \in \mathcal{N}\}$ wypełnia gęsto przedział $[0, 1]$. Wobec ciągłości i okresowości funkcji f otrzymujemy, że $f = M$. Zatem także $k = M$ oraz $h(x) = Mx^p$, $x \in (0, \infty)$.

Na koniec zauważmy, że para funkcji g, h, gdzie $h(x) = Mx^p$ dla $x \in (0, \infty)$, spełnia równanie (H) dla $x, y \in (0, \infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$Mx^p g(y)^p = Mx^p + Mx^p y^p, \qquad x, y \in (0, \infty),$$

a stąd $g(y) = (1 + y^p)^{\frac{1}{p}}$, dla $y \in (0, \infty)$. To kończy dowód twierdzenia. $\square$

Wykorzystując powyższe rozumowanie, rozwiążemy teraz interesujące nas równanie funkcyjne, które pojawi się w trakcie dowodu końcowego wyniku tego rozdziału, czyli Wniosku 5.11.

Lemat 5.7. *Niech para funkcji* $g\colon (0,1] \to [1,\infty)$, $h\colon [0,1] \to [0,1]$ *spełnia równanie* (Hmin)*, tj.*

$$h(\min(xg(y),1)) = \min(h(x)+h(xy),1),$$

dla wszystkich $x \in (0,1)$, $y \in (0,1]$*. Jeżeli* h *jest ciągłą funkcją, taką że* $h(x) < 1$ *dla* $x < 1$*, to* $h = 0$ *lub* $h(x) = Mx^p$ *oraz* $g(x) = (1+x^p)^{\frac{1}{p}}$ *dla pewnych stałych* $M, p > 0$.

Dowód. Na początku zauważmy, że $h(x) = 1$ implikuje $x = 1$. Zatem jeśli równanie (Hmin) jest spełnione dla $x \in (0,1)$, $y \in (0,1]$, to w szczególności spełnione jest równanie (H) dla $x \in (0,1)$, $y \in (0,1]$, takich że $xg(y) < 1$.

Przyjrzyjmy się następnie wartości $g(1)$. Jeżeli $g(1) = 1$, wówczas wstawiając $y = 1$ do równania (Hmin), otrzymamy $h(x) = 2h(x)$ dla wszystkich $x \in (0,1)$, a stąd $h(x) = 0$ na tym przedziale. Z ciągłości h wynika, że wówczas $h = 0$. Dalej rozważamy $g(1) > 1$ i możemy zdefiniować $p := 1/\lg g(1) > 0$, gdzie przez lg oznaczamy w całym dowodzie logarytm o podstawie 2.

Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 5.6 przyjmijmy

$$h(x) = x^p \cdot k(x), \qquad\qquad x \in [0,1],$$

z wykładnikiem p określonym przed chwilą oraz pewną ciągłą funkcją $k\colon [0,1] \to [0,\infty]$. Wykażemy, że k jest stała. Równanie (H) przyjmuje zatem postać

$$g(y)^p \cdot k(xg(y)) = k(x) + y^p \cdot k(xy),$$

i jest spełnione dla $x \in (0,1)$, $y \in (0,1]$, takich że $xg(y) < 1$. Podstawiając $x = 2^{t/p}$, możemy zapisać powyższe równanie w następującej formie:

$$g(y)^p \cdot k(2^{(t+p\lg g(y))/p}) = k(2^{t/p}) + y^p \cdot k(2^{(t+p\lg y)/p}),$$

dla $t \in (-\infty,0)$, $y \in (0,1]$, takich że $2^{t/p} \cdot g(y) < 1$. Ponieważ $p > 0$, zachodzi

$$2^{t/p} \cdot g(y) < 1 \iff 2^{t/p} \cdot 2^{\lg g(y)} < 1 \iff 2^{(t+p\lg g(y))/p} < 1 \iff t + p\lg g(y) < 0.$$

Zdefiniujmy jeszcze jedną funkcją, $f(t) := k(2^{t/p})$ dla $t \in (-\infty,0)$, i zapiszmy ponownie nasze równanie:

$$g(y)^p \cdot f(t+p\lg g(y)) = f(t) + y^p \cdot f(t+p\lg y), \tag{5.5}$$

które jest prawdziwe dla $t \in (-\infty,0)$, $y \in (0,1]$, takich że $t + p\lg g(y) < 0$. Pamiętamy, że $p\lg g(1) = 1$ i stąd $g(1)^p = 2$. Wstawiając $y = 1$ do równania powyżej, otrzymujemy więc zależność $f(t+1) = f(t)$ dla $t \in (-\infty,0)$, takich że $t + p\lg g(1) = t+1 < 0$. Zatem f jest ciągłą funkcją okresową, o okresie 1. Wykażemy, że jest to funkcja stała.

Ustalmy dowolną ujemną liczbę niewymierną r. Przyjmijmy

$$y_0 := g(1)^r, \qquad q := p\lg g(y_0); \qquad \text{wtedy } \ g(y_0) = 2^{\frac{q}{p}}, \qquad y_0^p = 2^r, \qquad p\lg y_0 = r.$$

Zauważmy, że oczywiście $g(1) > 1$ oraz $r < 0$ implikują $y_0 \in (0,1)$, ponadto $q \geqslant 0$. Wstawiając teraz $y = y_0$ do (5.5), otrzymujemy

$$2^q \cdot f(t+q) = f(t) + 2^r \cdot f(t+r), \tag{5.6}$$

dla $t \in (-\infty, 0)$, takich że $t + p \lg g(y_0) = t + q < 0$. Funkcja ciągła okresowa f osiąga swoje kresy. Niech M będzie kresem górnym f, a m kresem dolnym f, gdzie $m, M \in (0, \infty)$. Następnie niech a oraz b będą dowolnymi punktami na ujemnej półosi rzeczywistej, w których $f(a) = M$, $f(b) = m$. Podstawmy w równaniu (5.6) kolejno $t = a - q$, $t = b - q$:

$$2^q \cdot M = 2^q \cdot f(a) = f(a-q) + 2^r \cdot f(a-q+r) \leqslant M + 2^r \cdot M, \qquad \text{skąd} \qquad 2^q \leqslant 1 + 2^r,$$
$$2^q \cdot m = 2^q \cdot f(b) = f(b-q) + 2^r \cdot f(b-q+r) \geqslant m + 2^r \cdot m, \qquad \text{skąd} \qquad 2^q \geqslant 1 + 2^r.$$

Zatem $2^q = 1 + 2^r$, co oznacza, że w powyższych nierównościach prawe strony są równe lewym i we wszystkich oszacowaniach muszą występować równości. W szczególności zachodzi $f(a-q) = f(a-q+r) = M$.

Zauważmy, że co najmniej jedna z liczb $-q$, $r-q$ jest niewymierna, nazwijmy ją δ. Oczywiście $\delta < 0$. Zostało już wykazane, że jeśli $f(a) = M$, to także $f(a+\delta) = M$. W konsekwencji $f(a+n\delta) = M$ dla wszystkich $n \in \mathcal{N}$. Udowodniony wcześniej lemat 5.5 prowadzi do wniosku, że zbiór $\{(a+n\delta) \bmod 1 \mid n \in \mathcal{N}\}$ wypełnia gęsto przedział $[0,1]$. Wobec ciągłości i okresowości funkcji f otrzymujemy, że $f = M$. Zatem także $k = M$ oraz $h(x) = Mx^p$, $x \in (0,1)$.

Ustalmy teraz dowolnie $y \in (0,1]$ i wstawmy obliczoną przed chwilą funkcję h do równania (H) dla $x \in (0,1)$, takich że $x < 1/g(y)$. Otrzymamy

$$Mx^p g(y)^p = Mx^p + Mx^p y^p,$$

a stąd $g(y) = (1+y^p)^{\frac{1}{p}}$. To kończy dowód twierdzenia. □

Zauważmy, że wstawiając $H(t) := h(2^t)$, $H\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$, oraz $G(t) := \lg g(2^t)$, $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, równanie (H) możemy przekształcić do

$$H(u + G(v)) = H(u) + H(u+v), \qquad u, v \in \mathbb{R}. \tag{5.7}$$

Ponieważ oczywiście $H(u+v) = H(v+u)$, to z (5.7) w szczególności wynika, że

$$H(v) + H(u + G(v)) = H(u) + H(v + G(u)), \qquad u, v \in \mathbb{R}, \tag{5.8}$$

co przypomina równanie (5.2) badane dawniej przez M. E. Kuczmę [55], J. Sikorską [69, 70] oraz N. Brillouët-Belluot [31], tj. równanie

$$v + H(u + G(v)) = u + H(v + G(u)), \qquad u, v \in \mathbb{R},$$

dla $G, H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Równanie to M. E. Kuczma rozwiązał w 1993 roku wśród funkcji analitycznych [55], następnie J. Sikorska udowodniła, że te same rozwiązania istnieją wśród funkcji dwukrotnie różniczkowalnych [69], a N. Brillouët-Belluot wśród funkcji różniczkowalnych [31], kolejno w latach 1998 oraz 2004. Inne rozwiązania równania (5.2) wskazała w 2003 roku J. Sikorska wśród funkcji jensenowsko wklęsłych oraz jensenowsko wypukłych [70]. Dotąd nie udało się rozwiązać tego równania w rodzinie funkcji ciągłych lub bijekcji.

5.2 Rozwiązania równania $I(x, S(y,z)) = S(I(x,y), I(x,z))$ dla R-implikacji I generowanej z t-normy ścisłej

Zastosujemy teraz wyniki zaprezentowane w poprzednim podrozdziale do udowodnienia kolejnych faktów związanych z tytułową rozdzielnością implikacji rozmytych, w tym R-implikacji.

Twierdzenie 5.8. *Niech* $S\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *będzie symetryczną, rosnącą funkcją z elementem neutralnym zero. Następnie niech* I *będzie R-implikacją wygenerowaną z t-normy ścisłej z generatorem* φ *w reprezentacji* (1.5)*. Wówczas jeśli para funkcji* S, I *spełnia równanie funkcyjne* (5.1),

$$I(x, S(y,z)) = S(I(x,y), I(x,z)),$$

dla wszystkich $x, y, z \in [0,1]$*, to* $S = S_D$*, czyli*

$$S(y,z) = S_D(y,z) = \begin{cases} \max(y,z), & y = 0 \textit{ lub } z = 0, \\ 1, & \textit{wpp}, \end{cases} \tag{5.9}$$

dla $y, z \in [0,1]$*, lub istnieje taka rosnąca funkcja* $g\colon (0,1] \to [1,\infty)$*, że dla wszystkich* $y, z \in (0,1)$*,* $y \geqslant z$ *zachodzi*

$$S(y,z) = \varphi^{-1}(\min(g(\frac{\varphi(z)}{\varphi(y)}) \cdot \varphi(y), 1)). \tag{5.10}$$

W drugą stronę, jeśli $S = S_D$ *lub* S *jest postaci* (5.10) *dla funkcji rosnącej* $g\colon (0,1] \to [1,\infty)$*, to para funkcji* S, I *spełnia równanie funkcyjne* (5.1) *dla wszystkich* $x, y, z \in [0,1]$.

Zanim zaprezentujemy dowód twierdzenia 5.8, przedstawimy dwie własności, które posiadają t-konormy, ale również funkcje S spełniające założenia powyższego twierdzenia - czyli różniące się od t-konorm tym, że nie muszą być łączne.

Uwaga 5.9. Niech $S\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ będzie symetryczną, rosnącą funkcją z elementem neutralnym zero. Wówczas $S \geqslant \max$, a zatem w szczególności $S(1,y) = 1$ dla wszystkich $y \in [0,1]$.

Dowód. Ponieważ S jest rosnąca oraz zero jest jej elementem neutralnym, to $S(x,y) \geqslant S(0,y) = y$ oraz $S(x,y) \geqslant S(x,0) = x$, a zatem $S(x,y) \geqslant \max(x,y)$. Oczywiście

$$1 \geqslant S(x,y) \geqslant \max(x,y) \geqslant \max(1,y) = 1$$

zatem $S(1,y) = 1$ dla wszystkich $y \in [0,1]$. □

Dowód twierdzenia 5.8. Niech $x, y, z \in [0,1]$. Ponieważ funkcja S jest symetryczna, bez straty ogólności możemy więc założyć, że $y \geqslant z$. To założenie będzie nas obowiązywało w całym dowodzie twierdzenia 5.8. Rozważymy dwa przypadki: gdy $x \leqslant y$ oraz gdy $x > y$.

Jeżeli $x \leqslant y$, to $LHS(5.1) = I(x, S(y,z)) \geqslant I(x,y) = 1$. Pierwsza nierówność wynika z tego, że zgodnie z uwagą 5.9 zachodzi $S \geqslant \max$, a funkcja I jest rosnąca ze względu na drugą zmienną. Druga równość wynika z postaci (1.5) funkcji I.

Jeśli natomiast $x > y$, to

- wstawiając $z = 0$ w (5.1), otrzymujemy

$$LHS(5.1) = I(x, S(y,0)) = I(x,y) = S(I(x,y),0) = S(I(x,y), I(x,0)) = RHS(5.1);$$

- wstawiając $x = 1$ w (5.1), otrzymujemy

$$LHS(5.1) = I(1, S(y,z)) = S(y,z) = S(I(1,y), I(1,z)) = RHS(5.1).$$

Zatem dalej wystarczy badać równanie (5.1) tylko dla $x, y, z \in (0,1)$, takich że $x > y \geqslant z$. Ze względu na klarowność dalszego dowodu, dalej rozważane będzie (5.1) na nieco większym zbiorze, mianowicie $x, y, z \in (0,1)$, takich że $x \geqslant y \geqslant z$.

„$\Longrightarrow$”

Niech $y, z \in (0,1)$ będą takie, że $y \geqslant z$, a następnie oznaczmy przez c stosunek $\frac{\varphi(z)}{\varphi(y)}$. Ponieważ $y, z > 0$ implikuje $\varphi(y), \varphi(z) > 0$ oraz $y \geqslant z$ implikuje $\varphi(y) \geqslant \varphi(z)$, więc zachodzi $c \in (0,1]$. Wówczas $z = \varphi^{-1}(c \cdot \varphi(y))$ i dla tak związanych ze sobą $y, z \in (0,1)$, $c \in (0,1]$ dowodzoną równość (5.10) możemy przepisać w następującej formie:

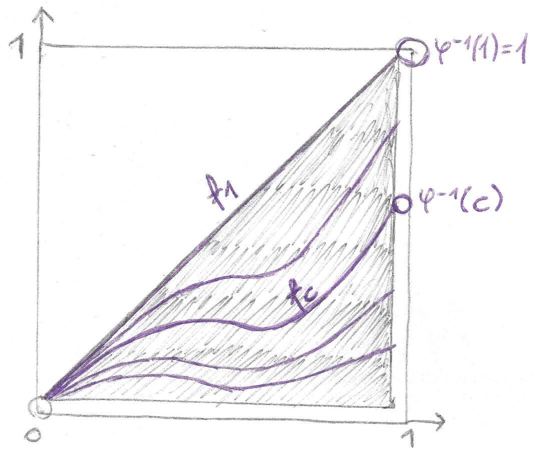
$$S(y, \varphi^{-1}(c\varphi(y))) = \varphi^{-1}(\min(g(c)\varphi(y), 1)). \tag{5.11}$$

Dowód implikacji „$\Longrightarrow$” w twierdzeniu 5.8 będzie zatem polegał na konstrukcji rosnącej funkcji $g\colon (0,1] \to [1,\infty)$, takiej że zachodzi (5.11) dla dowolnych $y \in (0,1)$, $c \in (0,1]$.

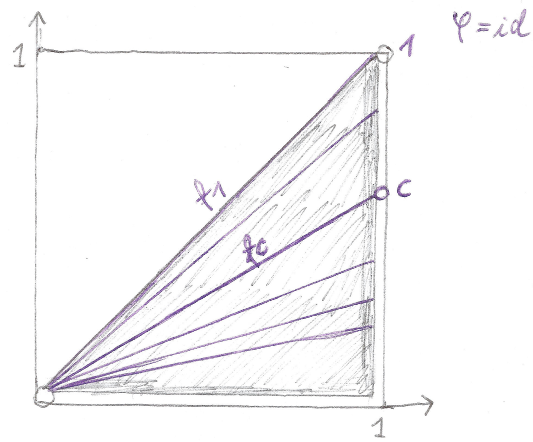
Niech $f_c\colon (0,1) \to (0,1]$ będzie funkcją zdefiniowaną przez

$$f_c(\cdot) := S(\cdot, \varphi^{-1}(c\varphi(\cdot))),$$

dla $c \in (0,1]$ - funkcje f_c są zatem pewnymi przekrojami funkcji S (rozłącznymi oraz takimi, że w sumie dają funkcję S na całym zbiorze $\{(x_1, x_2) \in [0,1]^2 \mid x_1 \geqslant x_2\}$ - porównaj rys. 5.1 oraz rys. 5.2). Ponieważ funkcje S, φ są rosnące oraz $S \geqslant \max$, także każda funkcja f_c jest rosnąca



Rysunek 5.1



Rysunek 5.2

oraz

$$f_c \geqslant Id, \tag{5.12}$$

dla $c \in (0,1]$. Udowodnimy, że $S = S_D$ lub dla wszystkich $c \in (0,1]$ funkcje f_c są postaci

$$f_c(\cdot) = \varphi^{-1}(\min(k_c \cdot \varphi(\cdot), 1)), \tag{5.13}$$

dla pewnych stałych $k_c \in [1,\infty)$. Wykazując, że funkcja g zdefiniowana przez $g(c) := k_c$, $c \in (0,1]$, jest rosnąca, skończymy dowód.

Zauważmy, że istnieją dwie możliwości, które kolejno rozważymy:

1) $\exists_{c_0 \in (0,1]} \qquad f_{c_0} = 1,$ 2) $\forall_{c \in (0,1]} \exists_{y_c \in (0,1)} \qquad f_c(y_c) < 1.$

1. Istnieje takie $c_0 \in (0,1]$, że $f_{c_0} = 1$.
   Oznacza to, że funkcja S jest stale równa 1 wzdłuż pewnego przekroju $\{(y, \varphi^{-1}(c_0 y)) \mid y \in (0,1)\}$ (por. rys. 1.1 oraz rys. 1.2). Ponieważ S jest rosnąca i symetryczna, to $S = 1$ na całym otwartym kwadracie jednostkowym. Ponadto z założenia twierdzenia oraz uwagi 5.9 zachodzi $S(0,t) = S(t,0) = t$ oraz $S(1,t) = S(t,1) = 1$ dla wszystkich $t \in [0,1]$, a zatem łącznie S jest postaci (5.9), tj. $S = S_D$.

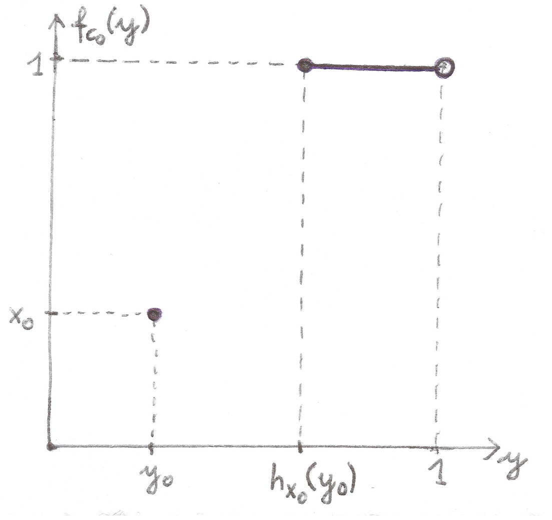
   Udowodnimy także w bardziej formalny sposób, że jeśli istnieje takie $c_0 \in (0,1]$, że $f_{c_0} = 1$, to $S = 1$ na otwartym kwadracie jednostkowym. Otóż załóżmy przeciwnie, że istnieją takie $a, b \in (0,1)$, że $S(a,b) < 1$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a \leqslant b$.

   - Jeżeli $\frac{\varphi(b)}{\varphi(a)} \geqslant c$, to $\varphi^{-1}(c\varphi(a)) \leqslant b$ i otrzymujemy sprzeczność:
   $$1 = f_{c_0}(a) = S(a, \varphi^{-1}(c\varphi(a))) \leqslant S(a,b) \implies S(a,b) = 1.$$
   - Jeżeli $\frac{\varphi(b)}{\varphi(a)} < c$, to $\varphi^{-1}(\frac{1}{c}\varphi(b)) < a$ i także otrzymujemy sprzeczność:
   $$1 = f_{c_0}(\varphi^{-1}(\frac{1}{c}\varphi(b))) = S(\varphi^{-1}(\frac{1}{c}\varphi(b)), b) \leqslant S(a,b) \implies S(a,b) = 1.$$

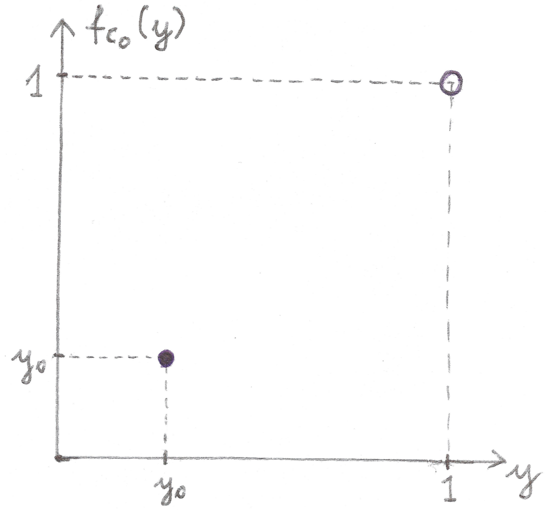
2. Zachodzi $f_c \neq 1$ dla wszystkich $c \in (0,1]$.
   Najpierw wprowadzimy jeszcze jedno pomocnicze oznaczenie, które uprości zapis wielu równań w dalszej części dowodu. Otóż niech $h_x \colon (0,x] \to [0,1]$ dla $x \in (0,1)$ będzie początkowym fragmentem przekroju pionowego zadanej w lemacie 1.45 R-implikacji I_T (generowanej z t-normy ścisłej) wzorem (1.5), tj.
   $$h_x(\cdot) = I(x, \cdot) = \varphi^{-1}(\frac{\varphi(\cdot)}{\varphi(x)}).$$
   Oczywiście h_x jest rosnącą bijekcją oraz dla wszystkich $x \in (0,1)$ zachodzi
   $$h_x > Id. \tag{5.14}$$
   Zatem równanie (5.1) możemy zapisać równoważnie w postaci
   $$S(h_x(y), h_x(z)) = \begin{cases} 1, & x \leqslant S(y,z), \\ h_x(S(y,z)), & wpp, \end{cases} \tag{5.15}$$
   dla $x, y, z \in (0,1)$, takich że $x \geqslant y \geqslant z$. Jeżeli ponadto $c \in (0,1]$, to prawdziwy jest następujący ciąg równoważności:
   $$\begin{aligned} z = \varphi^{-1}(c\varphi(y)) &\iff \varphi(z) = c\varphi(y) \iff \varphi^{-1}(\frac{\varphi(z)}{\varphi(x)}) = \varphi^{-1}(c \cdot \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}) \\ &\iff h_x(z) = \varphi^{-1}(c \cdot \varphi(h_x(y))) \iff S(h_x(y), h_x(z)) = f_c(h_x(y)), \end{aligned}$$
   a zatem wstawiając $z = \varphi^{-1}(c\varphi(y))$ dla $c = \frac{\varphi(z)}{\varphi(y)}$ do (5.15), otrzymujemy
   $$f_c(h_x(y)) = \begin{cases} 1, & x \leqslant f_c(y), \\ h_x(f_c(y)), & wpp, \end{cases} \tag{5.16}$$

dla wszystkich $c \in (0,1]$ oraz $x, y \in (0,1)$, $x \geqslant y$.

Wybierzmy teraz dowolnie $c_0 \in (0,1]$. Wówczas istnieje takie $y_0 \in (0,1)$, że $f_{c_0}(y_0) < 1$. Oznaczmy tę wartość przez x_0, tj. $x_0 := f_{c_0}(y_0)$, i z (5.12) wiemy, że $x_0 \geqslant y_0$. Równanie (5.16) bezpośrednio implikuje, że $f_{c_0}(h_{x_0}(y_0)) = 1$, a ponieważ funkcja f_{c_0} jest rosnąca, to zachodzi $f_{c_0}([h_{x_0}(y_0), 1)) = \{1\}$. Nasza dotychczasowa wiedza o postaci f_{c_0} przedstawiona jest schematycznie na rysunkach 5.3, 5.4 - drugi rysunek ilustruje sytuację, gdy $x_0 = y_0$, a stąd $h_{x_0}(y_0) = 1$.



Rysunek 5.3



Rysunek 5.4

Następnie weźmy dowolne $y_1 \in (y_0, h_{x_0}(y_0))$. Możemy to z pewnością uczynić, ponieważ z (5.14) wynika, że ów przedział jest niepusty. Niech $x_1 := h_{y_1}(y_0) = \varphi^{-1}(\frac{\varphi(y_0)}{\varphi(y_1)})$, a stąd $y_1 = h_{x_1}(y_0)$. Zachodzi

$$y_1 < h_{x_0}(y_0) \iff \varphi(y_1) < \frac{\varphi(y_0)}{\varphi(x_0)} \iff x_0 < \varphi^{-1}(\frac{\varphi(y_0)}{\varphi(y_1)}) = x_1.$$

Stąd $x_1 > x_0 = f_{c_0}(y_0)$ i na mocy (5.16) otrzymujemy

$$\begin{aligned} f_{c_0}(y_1) = f_{c_0}(h_{x_1}(y_0)) = h_{x_1}(f_{c_0}(y_0)) = \\ = \varphi^{-1}(\frac{\varphi(f_{c_0}(y_0))}{\varphi(x_1)}) = \varphi^{-1}(\frac{\varphi(f_{c_0}(y_0))}{\varphi(y_0)} \cdot \varphi(y_1)). \end{aligned}$$

Zatem dla $k_{c_0} := \frac{\varphi(f_{c_0}(y_0))}{\varphi(y_0)} \geqslant 1$ dostaliśmy, że

$$f_{c_0}(y) = \varphi^{-1}(k_{c_0}\varphi(y)), \qquad y \in (y_0, h_{x_0}(y_0)). \tag{5.17}$$

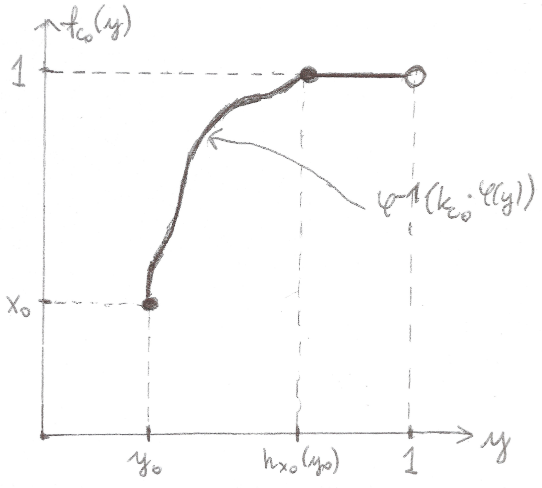
To, co wiemy dotąd o postaci funkcji f_{c_0}, przedstawione jest schematycznie na rys. 5.5.

Wreszcie niech $y_2 \in (0, y_0)$ oraz $x_2 := f_{c_0}(y_2)$. Ponieważ $f_{c_0}(y_2) \leqslant f_{c_0}(y_0) < 1$, to możemy powtórzyć dla y_2 obliczenia, które przeprowadziliśmy wcześniej dla y_0. W ich wyniku otrzymujemy, że $f_{c_0}([h_{x_2}(y_2), 1)) = \{1\}$ oraz, podobnie jak w (5.17),

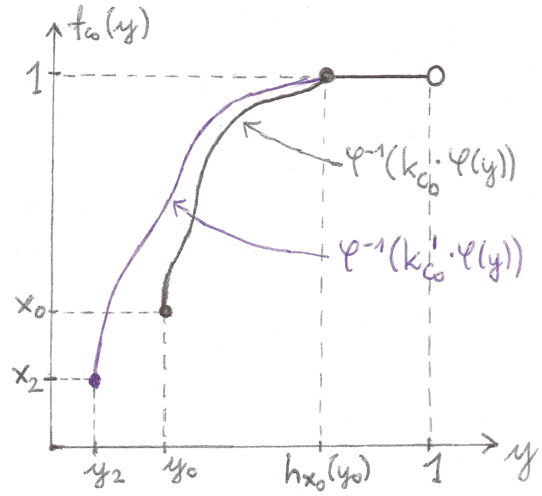
$$f_{c_0}(y) = \varphi^{-1}(k'_{c_0}\varphi(y)), \qquad y \in (y_2, h_{x_2}(y_2)), \tag{5.18}$$

gdzie $k'_{c_0} := \frac{\varphi(f_{c_0}(y_2))}{\varphi(y_2)}$ (por. rys. 5.6). Zachodzi $f_{c_0}(y_0) < 1 = f_{c_0}(h_{x_2}(y_2))$ oraz f_{c_0} jest rosnąca, więc $y_0 < h_{x_2}(y_2)$. Zatem $y_0 \in (y_2, h_{x_2}(y_2))$ i na mocy (5.18) otrzymujemy

$$f_{c_0}(y_0) = \varphi^{-1}(k'_{c_0}\varphi(y_0)) = \varphi^{-1}(\frac{\varphi(f_{c_0}(y_2))}{\varphi(y_2)} \cdot \varphi(y_0)),$$



Rysunek 5.5



Rysunek 5.6

a stąd

$$f_{c_0}(y_2) = \varphi^{-1}(\frac{\varphi(f_{c_0}(y_0))}{\varphi(y_0)} \cdot \varphi(y_2)) = \varphi^{-1}(k_{c_0}\varphi(y_2)).$$

Liczbę y_2 wybraliśmy dowolnie z przedziału $(0, y_0)$, zatem $f_{c_0}(y) = \varphi^{-1}(k_{c_0}\varphi(y))$ dla wszystkich $y \in (0, y_0)$. Ponadto

$$f_{c_0}(y_0) = \varphi^{-1}(\varphi(f_{c_0}(y_0))) = \varphi^{-1}(\frac{\varphi(f_{c_0}(y_0))}{\varphi(y_0)} \cdot \varphi(y_0)) = \varphi^{-1}(k_{c_0}\varphi(y_0)),$$

zatem łącznie

$$f_{c_0}(y) = \begin{cases} 1, & y \in [h_{x_0}(y_0), 1), \\ \varphi^{-1}(k_{c_0}\varphi(y)), & y \in (0, h_{x_0}(y_0)). \end{cases} \tag{5.19}$$

Zauważmy, że

$$\varphi^{-1}(k_{c_0}\varphi(y)) < 1 \iff k_{c_0}\varphi(y) < 1 \iff \frac{\varphi(f_{c_0}(y_0))}{\varphi(y_0)}\varphi(y) = \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(y_0)}\varphi(y) < 1$$
$$\iff y < \varphi^{-1}(\frac{\varphi(y_0)}{\varphi(x_0)}) = h_{x_0}(y_0),$$

a zatem rozwiązanie (5.19) można zapisać krócej

$$f_{c_0}(y) = \varphi^{-1}(\min(k_{c_0}\varphi(y), 1)), \qquad y \in (0, 1).$$

Udowodniliśmy w ten sposób, że funkcja f_{c_0} jest postaci (5.13) dla pewnej stałej k_{c_0}.

Następnie zauważmy, że $y_0 \in (y_2, h_{x_2}(y_2))$ wraz z równaniami (5.18) oraz (5.19) implikują także, że $\varphi^{-1}(\min(k_{c_0}\varphi(y_0), 1)) = f_{c_0}(y_0) = \varphi^{-1}(\min(k'_{c_0}\varphi(y_0), 1))$, a stąd $k_{c_0} = k'_{c_0}$, gdyż funkcja φ jest różnowartościowa oraz $\varphi(y_0) \neq 0$. Zatem

$$\frac{\varphi(f_{c_0}(y_0))}{\varphi(y_0)} = \frac{\varphi(f_{c_0}(y))}{\varphi(y)},$$

dla wszystkich $y \in (0, 1)$, takich że $f_{c_0}(y) < 1$. Poprawne więc będzie zdefiniowanie funkcji g w następujący sposób:

$$g(c) := \frac{\varphi(f_c(y_c))}{\varphi(y_c)}, \qquad c \in (0, 1],$$

gdzie y_c jest dowolną liczbą z przedziału $(0,1)$, taką że $f_c(y_c) < 1$.

Do wykazania pozostał fakt, że tak określona funkcja g jest rosnąca. Niech $c_1, c_2 \in (0,1]$ będą takie, że $c_1 < c_2$. Ponieważ S w szczególności jest rosnąca ze względu na drugą zmienną, to $f_{c_1} \leqslant f_{c_2}$, a zatem dla $y \in (0,1)$ takich, że $f_{c_2}(y) < 1$ zachodzi

$$g(c_1) = \frac{\varphi(f_{c_1}(y))}{\varphi(y)} \leqslant \frac{\varphi(f_{c_2}(y))}{\varphi(y)} = g(c_2).$$

W ten sposób skończyliśmy dowód implikacji „$\Longrightarrow$” w twierdzeniu 5.8.

„$\Longleftarrow$”

Załóżmy, że I jest R-implikacją wygenerowaną z t-normy ścisłej z generatorem φ w reprezentacji (1.5) oraz $S = S_D$ lub S jest postaci (5.10) dla dowolnej funkcji rosnącej $g\colon (0,1] \to [1,\infty)$. Pokażemy, że w obu tych przypadkach para funkcji S, I spełnia równanie funkcyjne (5.1) dla wszystkich $x, y, z \in (0,1)$, $x \geqslant y \geqslant z$.

1) $S = S_D$
   Dla $x, y, z \in (0,1)$ mamy $S_D(y,z) = 1$ oraz $I(x,y), I(x,z) > 0$, stąd $LHS(5.1) = 1 = RHS(5.1)$.

2) $S(y,z) = \varphi^{-1}(\min(g(\frac{\varphi(z)}{\varphi(y)}) \cdot \varphi(y), 1))$, dla wszystkich $y, z \in (0,1), y \geqslant z$, gdzie $g\colon (0,1] \to [1,\infty)$ jest dowolną funkcją rosnącą.
   Wówczas dla $x, y, z \in (0,1)$, $x \geqslant y \geqslant z$ zachodzą równości:

$$\begin{aligned} RHS(5.1) &= S\left(\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}\right), \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(z)}{\varphi(x)}\right)\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(\min\left(g\left(\frac{\varphi(z)}{\varphi(x)} \cdot \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)}\right) \cdot \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}, 1\right)\right) = \varphi^{-1}\left(\min\left(g\left(\frac{\varphi(z)}{\varphi(y)}\right) \cdot \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}, 1\right)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} LHS(5.1) &= \begin{cases} 1, & x \leqslant S(y,z), \\ \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(S(y,z))}{\varphi(x)}\right), & wpp, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & x \leqslant S(y,z), \\ \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi\circ\varphi^{-1}\left(\min\left(g\left(\frac{\varphi(z)}{\varphi(y)}\right)\cdot\varphi(y), 1\right)\right)}{\varphi(x)}\right), & wpp, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & x \leqslant S(y,z), \\ \varphi^{-1}(\min(g\left(\frac{\varphi(z)}{\varphi(y)}\right) \cdot \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}, \frac{1}{\varphi(x)})), & wpp, \end{cases} \\ &= \varphi^{-1}(\min(g(\frac{\varphi(z)}{\varphi(y)}) \cdot \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}, \frac{1}{\varphi(x)}, 1)) = \varphi^{-1}(\min(g(\frac{\varphi(z)}{\varphi(y)}) \cdot \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}, 1)) \\ &= RHS(5.1). \end{aligned}$$

   Czwarta równość w ostatnim ciągu równości wynika z tego, że

$$x \leqslant S(y,z) \iff g(\frac{\varphi(z)}{\varphi(y)}) \cdot \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)} \geqslant 1,$$

   co jest prawdą, ponieważ

$$\begin{aligned} x \leqslant S(y,z) &\iff x \leqslant \varphi^{-1}(\min(g(\frac{\varphi(z)}{\varphi(y)}) \cdot \varphi(y), 1)) \iff \varphi(x) \leqslant \min(g(\frac{\varphi(z)}{\varphi(y)}) \cdot \varphi(y), 1) \\ &\iff 1 \leqslant \min(g(\frac{\varphi(z)}{\varphi(y)}) \cdot \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}, \frac{1}{\varphi(x)}) \iff 1 \leqslant g(\frac{\varphi(z)}{\varphi(y)}) \cdot \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}, \end{aligned}$$

gdyż $\frac{1}{\varphi(x)} > 1$ dla wszystkich $x \in (0,1)$.

$\square$

Przykład 5.10. Niech $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ będzie R-implikacją wygenerowaną z t-normy ścisłej z generatorem φ w reprezentacji (1.5). Następnie niech $g_1 := 1$, $g_2(x) := x+1$ oraz $g_3(x) := x+2$, $x \in (0,1]$. Wszystkie g_1, g_2, g_3 są funkcjami rosnącymi o zbiorze wartości zawartym w $[1,\infty)$. Zatem z twierdzenia 5.8 symetryczne funkcje $S_1, S_2, S_3\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ są takie, że dla wszystkich $y, z \in (0,1)$, $y \geqslant z$ zachodzi

$$S_i(y,z) = \varphi^{-1}(\min(g_i(\frac{\varphi(z)}{\varphi(y)}) \cdot \varphi(y), 1)), \qquad i = 1,2,3,$$

oraz $S_i(y,0) = y$, $S_i(y,1) = 1$ dla $y \in [0,1]$, $i \in \{1,2,3\}$, spełniają wraz z I równanie funkcyjne (5.1) dla wszystkich $x, y, z \in [0,1]$.

Zauważmy, że

$$S_1(y,z) = \varphi^{-1}(\min(g_1(\frac{\varphi(z)}{\varphi(y)}) \cdot \varphi(y), 1)) = \varphi^{-1}(\min(\varphi(y), 1)) = y,$$

dla $y, z \in (0,1)$, $y \geqslant z$. Czyli $S_1 = S_M = \max$, a więc w szczególności S_1 jest t-konormą.

Następnie zauważmy, że

$$\begin{aligned} S_2(y,z) &= \varphi^{-1}(\min(g_2(\frac{\varphi(z)}{\varphi(y)}) \cdot \varphi(y), 1)) = \varphi^{-1}(\min((\frac{\varphi(z)}{\varphi(y)} + 1) \cdot \varphi(y), 1)) \\ &= \varphi^{-1}(\min(\varphi(z) + \varphi(y), 1)), \end{aligned}$$

dla $y, z \in (0,1)$, $y \geqslant z$. Zwróćmy uwagę, że formuła ta jest oczywiście prawdziwa również dla dowolnych $y, z \in [0,1]$. Oznacza to, że S_2 jest t-konormą nilpotentną z generatorem $\varphi \in \Phi$ w reprezentacji (1.3).

Wreszcie przyjrzyjmy się funkcji S_3. Dla $y, z \in (0,1)$, $y \geqslant z$, zachodzi

$$\begin{aligned} S_3(y,z) &= \varphi^{-1}(\min(g_3(\frac{\varphi(z)}{\varphi(y)}) \cdot \varphi(y), 1)) = \varphi^{-1}(\min((\frac{\varphi(z)}{\varphi(y)} + 2) \cdot \varphi(y), 1)) \\ &= \varphi^{-1}(\min(2\varphi(y) + \varphi(z), 1)). \end{aligned}$$

Funkcja S_3 nie jest t-konormą, ponieważ nie jest łączna. Na przykład dla $x, y, z \in (0,1)$, $x \geqslant y \geqslant z$, takich że $5\varphi(y) + 2\varphi(z) < 1$ oraz $\varphi(x) \in (2\varphi(y) + \varphi(z), \frac{1-\varphi(y)}{2})$ zachodzi

$$S_3(x,y) = \varphi^{-1}(2\varphi(x) + \varphi(y)), \qquad S_3(y,z) = \varphi^{-1}(2\varphi(y) + \varphi(z))$$

następnie

$$x \geqslant S_3(y,z) \iff \varphi(x) \geqslant 2\varphi(y) + \varphi(z) \qquad \text{oraz} \qquad S_3(x,y) \geqslant \max(x,y) = x \geqslant z,$$

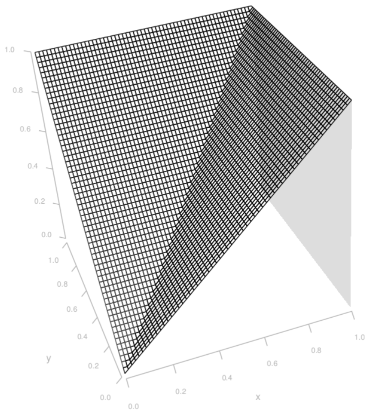
a stąd

$$\begin{aligned} S_3(x, S_3(y,z)) &= \varphi^{-1}(\min(2\varphi(x) + \varphi \circ S_3(y,z), 1)) = \varphi^{-1}(\min(2\varphi(x) + 2\varphi(y) + \varphi(z), 1)), \\ S_3(S_3(x,y), z) &= \varphi^{-1}(\min(2\varphi \circ S_3(x,y) + \varphi(z), 1)) = \varphi^{-1}(\min(4\varphi(x) + 2\varphi(y) + \varphi(z), 1)). \end{aligned}$$

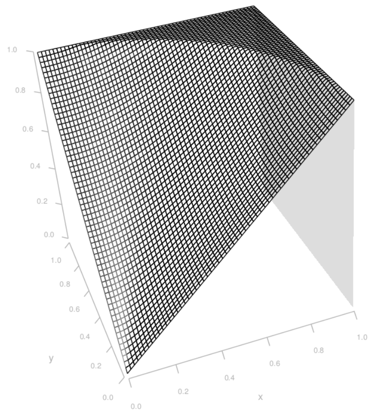
Zatem

$$S_3(x, S_3(y,z)) \neq S_3(S_3(x,y), z),$$

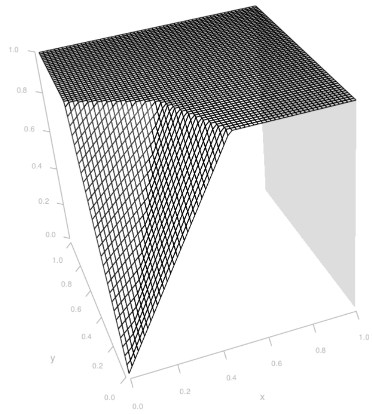
dla x, y, z takich, że $2\varphi(x) + 2\varphi(y) + \varphi(z) < 1$.



(e) $S_1(x, y) = \max(x, y)$



(f) $S_2(x, y) = \sqrt{\min(x^2 + y^2, 1)}$ (dla $\varphi(x) = x^2$)



(g) $S_3(x, y) = \min(2 \cdot \max(x, y) + \min(x, y), 1)$ (dla $\varphi = Id$)

Rysunek 5.7: Wykresy funkcji S_1, S_2 oraz S_3 z przykładu 5.10 Wszystkie są wraz z I rozwiązaniem równania (5.1), S_1, S_2 są t-konormami, podczas gdy S_3 nie jest t-konormą

Wniosek 5.11. *Niech S będzie t-konormą nilpotentną z funkcją $\psi \in \Phi$ w reprezentacji* (1.3) *oraz niech I będzie R-implikacją wygenerowaną z t-normy ścisłej z funkcją $\varphi \in \Phi$ w reprezentacji* (1.5). *Następujące zdania są równoważne:*

1. *Para funkcji S, I spełnia równanie funkcyjne* (5.1), *tj. $I(x, S(y, z)) = S(I(x, y), I(x, z))$, dla wszystkich $x, y, z \in [0, 1]$.*

2. *Funkcja ψ jest także generatorem R-implikacji I, tj. istnieje takie $p \in \mathbb{R}_+$, że $\psi(x) = (\varphi(x))^p$, czyli równoważnie $\psi \circ \varphi^{-1}(x) = x^p$, dla wszystkich $x \in [0, 1]$.*

Dowód. „(1) $\Longrightarrow$ (2)”
Nilpotenta t-konorma S w szczególności spełnia wszystkie założenia twierdzenia 5.8, zatem skoro dla pary S, I prawdziwe jest równanie (5.1), to na mocy owego twierdzenia $S = S_D$ lub S jest postaci (5.10), czyli

$$S(x, y) = \varphi^{-1}(\min(g(\frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}) \cdot \varphi(x), 1)),$$

dla wszystkich $x, y \in (0, 1)$, $x \geqslant y$, gdzie $g\colon (0, 1] \to [1, \infty)$ jest pewną rosnącą funkcją.

Ponieważ S_D nie jest t-konormą nilpotentną (choćby dlatego, że nie jest ciągła), to musi zachodzić druga z wymienionych przed chwilą możliwości. Równoważnie, podobnie jak to czyniliśmy w dowodzie twierdzenia 5.8, możemy to zapisać w następujący sposób:

$$S(x, \varphi^{-1}(c \cdot \varphi(x))) = \varphi^{-1}(\min(g(c) \cdot \varphi(x), 1)),$$

dla wszystkich $x \in (0, 1)$ oraz $c \in (0, 1]$. Jednocześnie ponieważ S jest postaci (1.3) z generatorem ψ, to zachodzi

$$S(x, \varphi^{-1}(c \cdot \varphi(x))) = \psi^{-1}(\min(\psi(x) + \psi \circ \varphi^{-1}(c \cdot \varphi(x)), 1)),$$

dla $x \in (0, 1)$, $c \in (0, 1]$.

Oznaczmy przez h złożenie $\psi \circ \varphi^{-1}$ i zauważmy, że $h\colon [0, 1] \to [0, 1]$ oczywiście także jest rosnącą bijekcją. Łącząc dwa ostatnie równania, dla $x \in (0,1)$, $c \in (0,1]$, dostajemy

$$
\begin{aligned}
&\varphi^{-1}(\min(g(c)\varphi(x),1)) = \psi^{-1}(\min(\psi(x) + \psi \circ \varphi^{-1}(c\varphi(x)),1))\\
&\iff \quad \psi \circ \varphi^{-1}(\min(g(c)\varphi(x),1)) = \min(\psi \circ \varphi^{-1}(\varphi(x)) + \psi \circ \varphi^{-1}(c\varphi(x)),1)\\
&\iff \quad h(\min(g(c)\varphi(x),1)) = \min(h(\varphi(x)) + h(c\varphi(x)),1)\\
&\iff \quad h(\min(g(c)x,1)) = \min(h(x) + h(cx),1).
\end{aligned}
$$

W ostatnim wierszu otrzymaliśmy, że para funkcji g, h spełnia równanie (Hmin) dla $x \in (0,1)$ oraz $c \in (0,1]$. Funkcja h jako rosnąca bijekcja jest oczywiście także ciągła oraz $h(x) < 1$ dla $x < 1$, zatem g wraz z h spełniają założenia lematu 5.7, na mocy którego $h(x) = Mx^p$ dla pewnych stałych $M, p > 0$ (rozwiązanie $h = 0$ jest niemożliwe, ponieważ h jest bijekcją). Wreszcie $h(1) = 1$ implikuje $M = 1$, co kończy dowód wniosku w tę stronę.

„(1) $\Longleftarrow$ (2)”
Załóżmy, że $\psi \circ \varphi^{-1}(x) = x^p$ dla pewnej nieujemnej liczby rzeczywistej p oraz dla wszystkich $x \in [0,1]$. Chcemy pokazać, że dla dowolnego $c \in (0,1]$ istnieje $g(c) \in [1,\infty)$, takie że

$$
S(x, \varphi^{-1}(c \cdot \varphi(x))) = \varphi^{-1}(\min(g(c) \cdot \varphi(x),1)),
$$

dla wszystkich $x \in (0,1)$. Prawdziwy jest ciąg równoważności

$$
\begin{aligned}
&S(x,\varphi^{-1}(c\varphi(x))) = \varphi^{-1}(\min(g(c)\varphi(x),1))\\
&\iff \quad \psi^{-1}(\min(\psi(x) + \psi \circ \varphi^{-1}(c\varphi(x)),1)) = \varphi^{-1}(\min(g(c)\varphi(x),1))\\
&\iff \quad \min(\psi \circ \varphi^{-1}(\varphi(x)) + \psi \circ \varphi^{-1}(c\varphi(x)),1) = \psi \circ \varphi^{-1}(\min(g(c)\varphi(x),1))\\
&\iff \quad \min(\varphi(x)^p + c^p\varphi(x)^p,1) = (\min(g(c)\varphi(x),1))^p\\
&\iff \quad \min((1+c^p)\varphi(x)^p,1) = \min(g(c)^p\varphi(x)^p,1)\\
&\iff \quad g(c) = (1+c^p)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Otrzymana przed chwilą funkcja g jest rosnąca, zatem z twierdzenia 5.8 równanie (5.1) jest spełnione. To kończy dowód. □

Uwaga 5.12. (i) Z dowolności rosnących funkcji $g\colon (0,1] \to [1,\infty)$ oraz z wniosku 5.11 wynika, że twierdzenie 5.8 charakteryzuje nieskończenie wiele nowych rozwiązań równania (5.1), które nie są t-konormami ciągłymi i archimedesowymi, a zatem nie były opisane w twierdzeniu 5.3. Jednym z takich nowych rozwiązań jest funkcja S_3 z przykładu 5.10.

(ii) Innym ważnym pytaniem jest, jak wiele nowych t-konorm otrzymujemy wśród rozwiązań w twierdzeniu 5.8, co jest równoważne pytaniu, jak wiele wśród rozwiązań równania (5.1) jest t-konorm, które nie są nilpotentne. Oczywiście jedną z nich jest drastyczna t-konorma S_D, a drugą S_M, którą otrzymaliśmy w przykładzie 5.10 dla funkcji $g = 1$ (w przykładzie była oznaczona także przez S_1).

(iii) Z wniosku 5.11 wynika, że t-konormy ciągłe i archimedesowe odpowiadają funkcjom g postaci $g(x) = (1+x^p)^{\frac{1}{p}}$, $x \in (0,1]$, dla dowolnych $p \in \mathbb{R}_+$. Problem otwartym pozostaje kwestia, czy istnieją funkcje rosnące $g\colon (0,1] \to [1,\infty)$, takie że:

(a) $g \neq 1$,

(b) $g(x) \not\equiv (1+x^p)^{\frac{1}{p}}$, dla żadnej $p \in \mathbb{R}_+$,

dla których funkcja $S\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ postaci (5.10), dla $x, y \in (0,1)$, $x \geqslant y$, jest łączna, a zatem jest t-konormą.

Bibliografia

[1] Aczél, J. *Lectures on functional equations and their applications*, vol. 19 of *Mathematics in science and engineering.* Academic Press, New York, 1966.

[2] Alsina, C., Frank, M. J., and Schweizer, B. *Associative functions. Triangular norms and copulas.* World Scientific Publishing Company, Singapore, 2006.

[3] Atanassov, K. Intuitionistic fuzzy sets. In *VII ITKR's Session* (Sofia, Bulgary, 1983), V. Sgurev, Ed.

[4] Atanassov, K. *Intuitionistic Fuzzy Sets. Theory and Applications.*, vol. 35 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing.* Physica-Verlag, Heidelberg, 1999.

[5] Baczyński, M. On a class of distributive fuzzy implications. *Internat. J. Uncertain. Fuzziness Knowledge-Based Systems 9* (2001), 229–238.

[6] Baczyński, M. Contrapositive symmetry of distributive fuzzy implications. *Internat. J. Uncertain. Fuzziness Knowledge-Based Systems 10* (2002), 135–147.

[7] Baczyński, M. On the distributivity of fuzzy implications over continuous and Archimedean triangular conorms. *Fuzzy Sets and Systems 161*, 10 (2010), 1406–1419.

[8] Baczyński, M. On the distributivity of fuzzy implications over representable uninorms. *Fuzzy Sets and Systems 161*, 17 (2010), 2256–2275.

[9] Baczyński, M. On the Distributivity of Implication Operations over t-Representable t-Norms Generated from Strict t-Norms in Interval-Valued Fuzzy Sets Theory. In *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (Proc. 13th International Conference, IPMU 2010, Dortmund, Germany, June 28 - July 2, 2010. Part I)* (Dortmund, Germany, 2010), E. Hüllermeier, R. Kruse, and F. Hoffmann, Eds., vol. 80 of *Communications in Computer oraz Information Science*, Springer, pp. 637–646.

[10] Baczyński, M. Distributivity of Implication Operations over t-Representable T-Norms Generated from Nilpotent T-Norms. In *Fuzzy Logic and Applications-9th International Workshop, WILF 2011, Trani, Italy, August 29-31,2011. Proceedings*, A. M. Fanelli, W. Pedrycz, and A. Petrosino, Eds., vol. 6857 of *Lecture Notes in Computer Science.* Springer, Berlin, Heidelberg, 2011, pp. 25–32.

[11] Baczyński, M. On the distributive equation for t-representable t-norms generated from nilpotent and strict t-norms. In *Proc. EUSFLAT-LFA 2011* (Aix-les-Bains, France, 2011), S. Galichet, J. Montero, and G. Mauris, Eds., pp. 540–546.

[12] Baczyński, M. Distributivity of Implication Operations over t-Representable T-Norms Generated from Continuous oraz Archimedean T-Norms. In *Advances on Computational Intelligence, Part II – Proc. IPMU 2012* (Catania, Italy, 2012), S. Greco et al., Ed., vol. 298 of *Communications in Computer and Information Science*, Springer, pp. 501–510.

[13] Baczyński, M. A note on the distributivity of fuzzy implications over representable uninorms. In *Advances on Computational Intelligence, Part II – Proc. IPMU 2012* (Catania, Italy, 2012), S. Greco et al., Ed., vol. 298 of *Communications in Computer and Information Science*, Springer, pp. 375–384.

[14] Baczyński, M. The equation $\mathcal{I}(\mathcal{S}(x,y),z) = \mathcal{T}(\mathcal{I}(x,z),\mathcal{I}(y,z))$ for t representable t-conorms oraz t-norms generated from continuous, archimedean operations. In *Fuzzy Logic and Applications-10th International Workshop, WILF 2013, Genoa, Italy, November 19-22 2013. Proceedings*, A. M. Fanelli, W. Pedrycz, and A. Petrosino, Eds., vol. 8256 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013, pp. 131–138.

[15] Baczyński, M. Distributivity of implication operations over t-representable t-norms in interval-valued fuzzy set theory: the case of nilpotent t-norms. *Inform. Sci 257* (2014), 388–399.

[16] Baczyński, M., Beliakov, G., Bustince, H., and Pradera, A. *Advances in Fuzzy Implication Functions*, vol. 300 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013.

[17] Baczyński, M., and Jayaram, B. On the characterization of (S,N)-implications. *Fuzzy Sets and Systems 158* (2007), 1713–1727.

[18] Baczyński, M., and Jayaram, B. *Fuzzy Implications*, vol. 231 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.

[19] Baczyński, M., and Jayaram, B. On the distributivity of fuzzy implications over nilpotent or strict triangular conorms. *IEEE Trans. Fuzzy Syst. 17*, 3 (June 2009), 590–603.

[20] Baczyński, M., and Niemyska, W. On the distributivity equation $I(x, U_1(y,z)) = U_2(I(x,y), I(x,z))$ for decomposable uninorms (in interval-valued fuzzy sets theory) generated from conjunctive representable uninorms. In *Modeling Decisions for Artificial Intelligence (Proc. 11Th International Conference, MDAI 2014, Tokyo, Japan, October 29-31, 2014)* (Berlin, Heidelberg, 2014), Y. E. Torra, Y. Narukawa, Ed., vol. 8825 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, pp. 26–37.

[21] Baczyński, M., and Niemyska, W. On the functional equation $f(m_1(x+y)) = m_2(f(x)+f(y))$ connected to the distributivity of fuzzy implications. In *Proc. 8Th International Summer School on Aggregation Operators (AGOP 2015)* (Katowice, Polska, 2015), R. M. M. Baczyński, B. De Baets, Ed., pp. 199–204.

[22] Baczyński, M., and Niemyska, W. Some functional equations connected to the distributivity laws for fuzzy implications oraz triangular conorms. In *Proc. FUZZ IEEE 2015* (Istanbul, Turkey, 2015), pp. 1–6.

[23] Baczyński, M., Szostok, T., and Niemyska, W. On a functional equation related to distributivity of fuzzy implications. In *Proc. FUZZ IEEE 2013* (Hyderabad, India, 2013), pp. 1–5.

[24] Baczyński, M., Szostok, T., and Niemyska, W. On a functional equation related to the distributivity of fuzzy implications over triangular norms and conorms. *Kybernetika 50*, 4 (2014), 679–695.

[25] Balasubramaniam, J. Yager's new class of implications J_f and some classical tautologies. *Inform. Sci. 177*, 3 (2007), 930–946.

[26] Balasubramaniam, J., and Rao, C. J. M. On the distributivity of implication operators over T and S norms. *IEEE Trans. Fuzzy Syst. 12*, 2 (Apr. 2004), 194–198.

[27] Bandler, W., and Kohout, L. J. Semantics of implication operators and fuzzy relational products. *Internat. J. Man-Mach. Stud. 12*, 1 (1980), 89–116.

[28] Bedregal, B. On interval fuzzy negations. *Fuzzy Sets and Systems 161* (2010), 2290–2313.

[29] Bellman, R., and Giertz, M. On the analytic formalism of the theory of fuzzy sets. *Inform. Sci. 5* (1973), 149–156.

[30] Birkhoff, G. *Lattice theory 3rd ed.*, vol. 25 of *AMS Coll. Publ.* AMS, Providence, RI, 1967.

[31] Brillouët-Belluot, N. On a symetric functional equation in two variables. *Aequationes Math. 68* (2004), 10–20.

[32] Combs, W. E. Author's reply. *IEEE Trans. Fuzzy Syst. 7*, 3 (June 1999), 371–373.

[33] Combs, W. E. Author's reply. *IEEE Trans. Fuzzy Syst. 7*, 4 (Aug. 1999), 477–478.

[34] Combs, W. E., and Andrews, J. E. Combinatorial rule explosion eliminated by a fuzzy rule configuration. *IEEE Trans. Fuzzy Syst. 6*, 1 (Feb. 1998), 1–11.

[35] De Baets, B., and Fodor, J. C. Residual operators of uninorms. *Soft Computing 3* (1999), 89–100.

[36] Deschrijver, G., Cornelis, C., and Kerre, E. E. Implication in intuitionistic oraz interval-valued fuzzy set theory: construction, classification and application. *Internat. J. Approx. Reason. 35* (2004), 55–95.

[37] Deschrijver, G., Cornelis, C., and Kerre, E. E. On the representation of intuitionistic fuzzy t-norms and t-conorms. *IEEE Trans. Fuzzy Syst. 12* (2004), 45–61.

[38] Deschrijver, G., and Kerre, E. E. On the relationship between some extensions of fuzzy set theory. *Fuzzy Sets and Systems 133* (2003), 227–235.

[39] Deschrijver, G., and Kerre, E. E. Uninorms in L^*-fuzzy set theory. *Fuzzy Sets and Systems 148* (2004), 243–262.

[40] Dick, S., and Kandel, A. Comments on "Combinatorial rule explosion eliminated by a fuzzy rule configuration". *IEEE Trans. Fuzzy Syst. 7*, 4 (Aug. 1999), 475–477.

[41] Drewniak, J. *Podstawy teorii zbiorów rozmytych.* Uniwersytet Śląski, Katowice, 1984.

[42] Driankov, D., Hellendoorn, H., and Reinfrank, M. *An Introduction to Fuzzy Control (2nd ed.).* Springer-Verlag, London, UK, 1996.

[43] Drygaś, P. On a class of operations on interval-valued fuzzy. In *New Trends in Fuzzy Sets, Intuitionistic Fuzzy Sets, Generalized Nets oraz Related Topics. Vol. I: Foundations* (Warsaw, Poland, 2013), e. a. K.T. Atanassov, Ed., vol. 1.

[44] Dubois, D., Gottwald, S., Hajek, P., Kacprzyk, J., and Prade, H. Terminological difficulties in fuzzy set theory-the case of "intuitionistic fuzzy sets". *Fuzzy Sets and Systems 156* (2005), 485–491.

[45] Fodor, J. C., and Roubens, M. *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[46] Fodor, J. C., Yager, R. R., and Rybalov, A. Structure of uninorms. *Internat. J. Uncertain. Fuzziness Knowledge-Based Systems 5* (1997), 411–427.

[47] Goguen, J. A. L-fuzzy sets. *J. Math. Anal. Appl. 18* (1967), 145–174.

[48] Gorzałczany, M. B. A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems 21* (1987), 1–17.

[49] Gottwald, S. *A Treatise on Many-Valued Logic.* Research Studies Press, Baldock, 2001.

[50] I. B. Türksen, V. K., and Yager, R. R. A new class of fuzzy implications. axioms of fuzzy implication revisited. *Fuzzy Sets and Systems 100* (1998), 267–272.

[51] Jayaram, B. Rule reduction for efficient inferencing in similarity based reasoning. *Internat. J. Approx. Reason. 48*, 1 (2008), 156–173.

[52] Klement, E. P., Mesiar, R., and Pap, E. *Triangular Norms.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[53] Kuczma, M. *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe (Polish Scientific Publishers) and Uniwersytet Śląski, Warszawa–Kraków–Katowice, 1985.

[54] Kuczma, M., Choczewski, B., and Ger, R. *Iterative functional equations*, vol. 32 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge Univerity Press, Cambridge, 1990.

[55] Kuczma, M. E. On the mutual noncompatibility of homogeneous analytic non-power means. *Aequationes Math. 45* (1993), 300–321.

[56] Ling, C. H. Representation of associative functions. *Publ. Math. Debrecen 12* (1965), 189–212.

[57] Liu, H. Fuzzy implications derived from generalized additive generators of representable uninorms. *IEEE Trans. Fuzzy Syst. 21* (2013), 555–566.

[58] Mas, M., Massanet, S., Ruiz-Aguilera, D., and Torrens, J. A survey on the existing classes of uninorms. *J. Intell. Fuzzy Systems 29*, 3 (2015), 1021–1037.

[59] Mas, M., Monserrat, M., Torrens, J., and Trillas, E. A survey on fuzzy implication functions. *IEEE Trans. Fuzzy Syst. 15(6)* (2007), 1107–1121.

[60] Massanet, S., and Torrens, J. On a new class of fuzzy implications: h-implications and generalizations. *Inform. Sci. 181*, 11 (2011), 2111–2127.

[61] Massanet, S., and Torrens, J. On some properties of threshold generated implications. *Fuzzy Sets and Systems 205*, 16 (2012), 30–49.

[62] Mendel, J. M., and Liang, Q. Comments on "Combinatorial rule explosion eliminated by a fuzzy rule configuration". *IEEE Trans. Fuzzy Syst. 7*, 3 (June 1999), 369–371.

[63] Qin, F., and Baczyński, M. Distributivity equations of implications based on continuous triangular conorms (II). *Fuzzy Sets and Systems 240* (2014), 86–102.

[64] Qin, F., Baczyński, M., and Xie, A. Distributive equations of implications based on continuous triangular norms (I). *IEEE Trans. Fuzzy Syst. 20*, 1 (Feb. 2012), 153–167.

[65] Ruiz-Aguilera, D., and Torrens, J. Distributivity of strong implications over conjunctive and disjunctive uninorms. *Kybernetika 42*, 3 (2006), 319–336.

[66] Ruiz-Aguilera, D., and Torrens, J. Distributivity of residual implications over conjunctive and disjunctive uninorms. *Fuzzy Sets and Systems 158*, 1 (2007), 23–37.

[67] Sambuc, R. Fonctions ϕ-floues. application á l'aide au diagnostic en pathololologie thyroidienne. PhD thesis, Univ. Marseille, France, 1975.

[68] Schweizer, B., and Sklar, A. *Probablistic metric spaces.* North - Holland, Amsterdam, 1983.

[69] Sikorska, J. Differentiable solutions of a functional equation related to the non-power means. *Aequationes Math. 55* (1998), 146–152.

[70] Sikorska, J. On a functional equation related to power means. *Aequationes Math. 66* (2003), 261–276.

[71] Su, Y., and Liu, H. On ordinal sum implications. *Inform. Sci. 293* (2015), 251–262.

[72] Su, Y., Zong, W., and Liu, H. Distributivity of the ordinal sum implications over t-norms and t-conorms. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* (2015), in press.

[73] Trillas, E. Sobre funciones de negación en la teoría de conjuntos difusos. *Stochastica III/1* (1979), 47–60.

[74] Trillas, E., and Alsina, C. On the law $[(p \wedge q) \to r] = [(p \to r) \vee (q \to r)]$ in fuzzy logic. *IEEE Trans. Fuzzy Syst. 10*, 1 (Feb. 2002), 84–88.

[75] Xie, A., and Liu, H. A generalization of Yager's f-generated implications. *Internat. J. Approx. Reason. 54*, 1 (2013), 35–46.

[76] Xie, A., Liu, H., Zhang, F., and Li, C. On the distributivity of fuzzy implications over continuous archimedean t-conorms and continuous t-conorms given as ordinal sums. *Fuzzy Sets and Systems 205* (2012), 76–100.

[77] Xie, A., Liu, H., Zhang, F., and Li, C. Distributivity equations of fuzzy implications based on continuous triangular conorms given as ordinal sums. *IEEE Trans. Fuzzy Syst. 21* (2013), 541–554.

[78] Yager, R. R. On some new classes of implication operators and their role in approximate reasoning. *Inform. Sci. 167* (2004), 193–216.

[79] Yager, R. R., and Rybalov, A. Uninorm aggregation operators. *Fuzzy Sets and Systems 80* (1996), 111–120.

[80] Zadeh, L. A. Fuzzy sets. *Information and Control 8*, 3 (1965), 338–353.

[81] Zadeh, L. A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Trans. on Syst. Man and Cyber. 3*, 1 (1973), 28–44.

[82] Zhang, F., and Liu, H. On a new class of implications: (g,u)-implications and the distributive equations. *Internat. J. Approx. Reason. 54* (2013), 1049–1065.